PERIODICAL
UNIVERSITY OF HAWAII
LIBRARY

MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK

NEUE FOLGE
DER MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK

UNTER MITWIRKUNG DER
ÖSTERREICHISCHEN MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON
J. RADON
WIEN

53. BAND, 2. HEFT
MIT 1 TEXTABBILDUNG
(AUSGEGEBEN IM MAI 1949)

WIEN
SPRINGER-VERLAG
1949

Mh. Math.

Monatshefte für Mathematik

Neue Folge der Monatshefte für Mathematik und Physik

erscheinen zwanglos nach Maßgabe der eingelaufenen Arbeiten in Heften von wechselndem Umfang, die in kurzer Folge zur Ausgabe gelangen. Diese Hefte werden zu Bänden von 20—25 Bogen vereinigt. Der Preis eines Heftes richtet sich nach seinem Umfang und nach den entstandenen Herstellungskosten. Für Lieferungen in das Ausland gelten Auslandspreise.

Die für die Monatshefte für Mathematik bestimmten Manuskripte sind

an die Schriftleitung der Monatshefte für Mathematik, Mathematisches Institut der Universität, Wien IX., Strudlhofgasse 4,

zu senden.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs veröffentlicht. Beiträge, welche bereits an anderer Stelle in wörtlich oder auch nur inhaltlich gleicher Fassung publiziert worden sind, können nicht aufgenommen werden. Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke kostenlos und können weitere 125 Exemplare, falls bei Rücksendung der ersten Korrektur bestellt, gegen angemessene Entschädigung geliefert erhalten.

Die Manuskripte sollen in klarer Ausdrucksweise und unter Hinweglassung jedes überflüssigen Ballastes abgefaßt sein. Von Abbildungen ist sehr sparsamer Gebrauch zu machen, da sie die Drucklegung der Beiträge verzögern und auch den Preis der Zeitschrift verteuern. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen (Beschriftung nur in Bleistift ausführen) oder in klaren verständlichen Handskizzen bestehen. Die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Springer-Verlag, Wien I, Mölkerbastei 5

Fernsprecher U 26-5-60 Serie — Telegrammadresse Springerbuch Wien

53. Band/2. Heft

Inhaltsverzeichnis

Seite

Hlawka, E. Ausfüllung und Überdeckung konvexer Körper durch konvexe Körper 81

Hadwiger, H. Über Maßzahlen und Ungleichungen bei Mittelpunktseikörpern . . 132

Prachar, K. Zur Eulerschen Summierung Neumannscher und Legendrescher Reihen 138

Müller, H. R. Die Böschungslinien des elliptischen Raumes 151

Buchbesprechungen 165

Ausfüllung und Überdeckung konvexer Körper durch konvexe Körper.

Von
Edmund Hlawka, Wien.

(Eingelangt am 3. August 1948.)

Die Arbeit beschäftigt sich mit der Ausfüllung und Überdeckung eines konvexen Körpers B im R_n mit endlichem Volumen $V(B) > 0$ durch Körper, die aus einem konvexen Körper $K: f(x) \leqq r$ mit Mittelpunkt durch Parallelverschiebung hervorgehen. Bei der Ausfüllung verlangen wir, daß diese Körper nicht übereinandergreifen und das Gesamtvolumen S ein Maximum ist. Bei der Überdeckung soll das Gesamtvolumen Σ der überdeckenden Körper ein Minimum sein. Man kann zunächst verlangen, daß die maximale Ausfüllung, bzw. minimale Überdeckung regulär ist, d. h. daß die Mittelpunkte der Körper stets zu einem Gitter gehören. Die entsprechenden Gesamtvolumina seien S^*, bzw. Σ^*. Es ist natürlich $S \geqq S^*$, $\Sigma \leqq \Sigma^*$. Es ist, wie aus der Definition folgt, stets SV^{-1} und $S^* V^{-1} \leqq 1$, ΣV^{-1} und $\Sigma^* V^{-1} \geqq 1$. Es wird gezeigt, daß die Limiten ($r \to 0$) von $S V^{-1}$, $S^* V^{-1}$, ΣV^{-1}, $\Sigma^* V^{1-}$stets existieren und von B unabhängig sind. Diese nennen wir die Dichten Δ, Δ^*, ϑ, ϑ^*. Für Ausfüllungen wurde dies bei Kugeln von Rankin[1] gezeigt. Für Δ^*, bzw. ϑ^* (§ 6, § 13) wird eine Abschätzung nach unten und oben gegeben, die von B abhängt und die für $r \to 0$, $\Delta^* = J (\frac{1}{2} M)^n$, $\vartheta^* = J \varepsilon^n$ liefert. Dabei ist J das Volumen von $f(x) \leqq 1$, M das absolute Minimum, eine Größe, die von *Minkowski*[2] in der Geometrie der Zahlen eingeführt wurde. ε ist ebenfalls eine zahlengeometrische Größe, die ich absolute Exzentrizität nenne, da eine analoge Größe in der Theorie der Wabenzellen auftritt. (Remak, Hofreiter[3]). Der Zusammenhang, der in der ersten Formel aufscheint, findet sich anschaulich schon bei *Minkowski*. Für die Berechnung von M gibt es

---

[1] *Rankin*, Annals of Math. 48.
[2] *Minkowski*, Geometrie der Zahlen.
[3] *Hofreiter*, Monatshefte 40.

(wenigstens für $n \leqq 3$) Methoden. Insbesonders ist $\Delta^* < 1$, wenn K kein Polyeder, genauer kein $\frac{1}{2}$ M-Körper ist. ε ist nun (abgesehen vom Würfel) für Kugeln bis $n = 4$ bestimmt, und zwar von *Remak* und *Hofreiter*. Es wird in der Arbeit gezeigt, daß $\vartheta^* > 1$, wenn K kein $\frac{1}{2}$ M-Körper, insbesondere kein Polyeder ist. Die Bestimmung von Δ und ϑ liegt bedeutend tiefer und ist allgemein ungelöst. Für $n = 2$ und für den Kreis ist $\Delta = \Delta^*$, $\vartheta = \vartheta^*$ wie *Fejes*, *Hadwiger* und *Kerschner* gezeigt haben, doch lassen sich die Beweise auf den R_n nicht übertragen. Ihnen verdanken wir auf diesem Gebiet mit dem sich schon *Bravais*, *Kelvin* und andere beschäftigt haben, die ersten exakt bewiesenen Sätze. Für $n \geqq 4$ ist es sehr wahrscheinlich, daß es Körper gibt, für die $\Delta > \Delta^*$, $\vartheta < \vartheta^*$ ist. Es ist mir aber zu zeigen gelungen, daß trotzdem noch immer $\Delta < 1$, $\vartheta > 1$ ist, wenn K kein Polyeder von höchstens $3^n - 1$ Seiten ist, und überhaupt eine Abschätzung für diese Dichten, $S V^{-1}$, ΣV^{-1} zu liefern. Es wird weiter gezeigt, daß $\Delta = 1$ und $\vartheta = 1$ auseinanderfolgen. Die allgemeine Bestimmung der genauen Werte erscheint heute als unangreifbares Problem, nachdem selbst im gitterförmigen Fall erst sehr wenige Fälle erledigt sind.

In der Arbeit werden noch verschiedene Verallgemeinerungen behandelt (vgl. § 11, § 12 und § 16). Besitzt z. B. K keinen Mittelpunkt, so ist immer $\Delta < 1$, $\vartheta > 1$. Für Δ^* findet sich das bereits bei *Minkowski*[8]. Der letzte Paragraph beschäftigt sich mit einem Problem, der mit dem Vitalischen Überdeckungssatz aus der Theorie des *Lebesgue*schen Maßes zusammenhängt. Es handelt sich um die Frage, wieviele nicht übereinandergreifende Körper aus einer Überdeckung eines Bereiches B herausgegriffen werden können. Wir haben uns in der Arbeit hauptsächlich auf konvexe Bereiche B beschränkt. Dadurch wurde es ermöglicht, für die Abschätzungen von $S V^{-1}$, ΣV^{-1} usw. die *Brun-Minkowski*sche Theorie herauszuziehen. Es wäre wünschenswert, dies für allgemeine Bereiche durchzuführen. Ist der Rand von B genügend oft differenzierbar, so läßt sich dies, wenn K eine Kugel ist, mit Hilfe der Entwicklungen von *Weyl*, Journal of Math. 61, 1939 leicht durchführen.

---

[4] Für die Literatur, die mir nur zum Teil zugänglich war, vgl. *Fejer L.* Acta Sceged 11, 1946, Bulletin Amerc. Soc. 54 (1948). — *Hadwiger*, Mathem. Zeitschrift 49.

Anmerkung bei der Korrektur: Hiezu kommt noch die wichtige Arbeit von *Segre* und *Mahler*, Amer. Monthly **51** (1944) S. 261. Dort wird auch auf eine Arbeit von *A. Thue*, Norske Skrifter 1910 hingewiesen.

Inhalt.

§ 1. Figurengitter. — § 2. Minima eines konvexen Körpers. — § 3. Exzentrizität. § 4. Ein Satz über Figurengitter. — § 5. Extremale Punktverteilungen in konvexen Körpern. – § 6. Gitterförmige Ausfüllung konvexer Körper durch konvexe mit Mittelpunkt. — § 7. Ausfüllung konvexer Körper durch konvexe mit Mittelpunkt. — § 8. λ-Körper. — § 9. Ausfüllung durch Zylinder. — § 10. Dichte einer maximalen Ausfüllung. — § 11. Ausfüllung durch konvexe Körper ohne Mittelpunkt. — § 12. Ausfüllung mittels einer Menge $\{K\}$. — § 13. Gitterförmige Überdeckung. — § 14. Dichte einer minimalen Überdeckung. — § 15. Überdeckung konvexer Körper durch konvexe mit Mittelpunkt. — § 16. Überdeckung durch eine Menge $\{K\}$. — § 17. Zwei Sätze über Konfigurationen. — § 18. Weitere Sätze über Überdeckungen.

§ 1. Figurengitter.

Ist z ein Punkt des R_n und sind $a_1, \ldots, a_n$ linear unabhängige Vektoren des R_n, so heißt die Gesamtheit der Punkte $p = z + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i$, $(\lambda_i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ Punktgitter $\Gamma_z [a_1, \ldots, a_n]$. Die $a_1, \ldots, a_n$ heißen Basisvektoren des Gitters. Die Verbindungsvektoren zweier Gitterpunkte heißen Gittervektoren. Punktgitter, die aus $\Gamma_z [a_1, \ldots, a_n]$ durch Parallelverschiebung hervorgehen, rechnen wir in dieselbe Klasse und nennen diese Klasse Gitter $\Gamma [a_1, \ldots, a_n]$ erzeugt von den Gittervektoren $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i$ $(\lambda_i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Wird ein spezielles Punktgitter betrachtet $\Gamma_z [a_1, \ldots, a_n]$, so sagen wir das Gitter Γ befindet sich in der Lage z.

Wir bezeichnen Det $(a_1, \ldots, a_n)$ mit $D(\Gamma)$, es ist das Volumen des Elementarparallelepipeds $P [a_1, \ldots, a_n] = P_a$, das von den Basisvektoren $a_1, \ldots, a_n$ aufgespannt wird. Gehen n Gittervektoren $b_1, \ldots, b_n$ aus $a_1, \ldots, a_n$ durch eine ganzzahlige, unimodulare Transformation hervor, so erzeugen sie dasselbe Gitter. Besitzt ein Gitter Γ' die Basisvektoren $\lambda a_1, \ldots, \lambda a_n$, $(\lambda \neq 0)$, so schreiben wir $\Gamma' = \lambda \Gamma$ und es ist $D(\Gamma') = \lambda_n D(\Gamma)$. Es sei nun K ein konvexer Körper mit Mittelpunkt. Wir sprechen von einem Figurengitter[5] $[\Gamma, K]$, wenn in jeder Lage von Γ, jeder Gitterpunkt, Mittelpunkt des konvexen Körpers ist, der aus K durch Parallelverschiebung hervorgeht. Ist Γ in der Lage z, so sagen wir, das Figurengitter befindet sich in der Lage z und schreiben $[\Gamma, K]_z$. Ist K ein Punkt, so ist $[\Gamma, K] = \Gamma$; ist K das Parallelepiped

[5] Der Name stammt von *Hadwiger*.

P_a, so überdeckt $[\Gamma, P_a]$ in jeder Lage den R_n einfach und lückenlos, bei entsprechender Wahl der Randpunkte von P_a.

§ 2. Minima eines konvexen Körpers.

Es sei $f(x)$ die Distanzfunktion von K. Wir nennen $f(x)$ die f-Länge von x. Wir betrachten nun die i-ten Minima $M_i(\Gamma, f)$ $(i = 1, 2, \ldots n)$.

Sie sind so definiert:

$$M_i = f(m_i) = \text{Min } f(g) \tag{1}$$

unter allen Gittervektoren g, die linear unabhängig von $m_0 = 0, m_1, \ldots, m_{i-1}$ sind $(i = 1, \ldots, n)$.

Aus der Definition folgt sofort:

$$M_1 \leqq M_2 \leqq \ldots \leqq M_n \tag{2}$$

Weiters gilt:

Hilfssatz 1: [*Minowski*[2], § 50]

$$\frac{2^n}{n!} D(\Gamma) \leqq J M_1 M_2 \ldots M_n \leqq 2^n D(\Gamma) \tag{3}$$

wo J das Volumen des Eichkörpers $f(x) \leqq 1$ ist.

Durch Adaption des Gitters Γ können wir aus $m_1, \ldots, m_n$ neue Gittervektoren $l_1, \ldots, l_n$ bilden, so daß die l_i eine Linearkombination von $m_1 \ldots, m_i$ sind und[6]

$$N_i = f(l_i) \leqq \sum_{k=1}^{i} f(m_k) \leqq i M_i \tag{4}$$

ist. Diese l_i sind Basisvektoren des Gitters.

Wir wollen kurz die l_i ausgezeichnete Basisvektoren des Gitters Γ nennen. Es ist $\sup M_1(\Gamma, f) = M D^{\frac{1}{n}}$ über alle Gitter Γ mit festem $D(\Gamma) = D$, wo M von D unabhängig ist. M heißt das absolute Minimum von f.

Hilfssatz 2: Es gibt stets ein Gitter $\overline{\Gamma}$, wir nennen es maximales Gitter, mit $D(\overline{\Gamma}) = D$, so daß

$$M_1(\overline{\Gamma}, f) = M D^{\frac{1}{n}} \text{ ist.}$$

Beweis: Nach *K. Mahler*[7], gibt es stets ein kritisches Gitter Γ^* in Bezug auf den Körper $f(x) \leqq 1$. Dann ist $\overline{\Gamma} = M D^{\frac{1}{n}} \Gamma^*$ ein Gitter der gewünschten Eigenschaft.

---

[6] *K. Mahler*, Proceedings Amsterdam, 41.

[7] *K. Mahler*, Revista Tucuman (A) 5, 1946.

Hilfssatz 3: Ist $\overline{\Gamma}$ ein maximales Gitter, so ist $M_1(\overline{\Gamma}, f) = M_i(\overline{\Gamma}, f)$ $i = 1, \ldots n$ (*Minowski*[8] § 3).

Hilfsatz 4: (*E. Hlawka*[9])

$$J M^n(f) \geqq 2\zeta(n) \text{ wo } \zeta(n) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n} \text{ ist.}$$

Wir wollen jetzt den Begriff des 1. Minimums $M_1(\Gamma, f)$ verallgemeinern. Unter $\overset{k}{M}_1(\Gamma, f)$ verstehen wir folgendes:

Es gibt höchstens k—1 Gittervektorenpaare $\pm g \neq 0$ aus Γ, so daß $f(g) < \overset{k}{M}_1(\Gamma, f)$ ist, aber $f(g) \leqq \overset{k}{M}_1$ mindestens k-Gitterpunktpaare enthält.

Für $k = 1$ erhalten wir das 1. Minimum.

Hilfssatz 5: Es ist $\overset{k}{M}_1 \leqq k M_1$ und

$$J \overset{k}{M}_1^n \leqq 2^n k D(\Gamma) \tag{5}$$

Die 1. Behauptung ist trivial, die zweite entnimmt man z. B. aus (*E. Hlawka*[9], Satz 5).

Das sup $\overset{k}{M}_1(\Gamma, f)$ über alle Γ mit $D(\Gamma) = D$ hat wieder die Gestalt $\overset{k}{M} \frac{1}{D^n} \overset{k}{M}$ heißt das absolute Minimum.

Hilfssatz 6: (*E. Hlawka*[9], Satz 2)

$$J \overset{k}{M}^n \geqq 2k \tag{6}$$

§ 3. Exzentrizität.

Definition 1: Es werde die Menge aller Zahlen d betrachtet, für die das Figurengitter $[\Gamma, f(x) \leqq d]$ den R_n überdeckt. Dann heißt das Minimum aller dieser Zahlen d die Exzentrizität $\varepsilon(\Gamma, f)$.

Aus der Definition folgt, daß es zu jedem x des R_n einen Gitterpunkt g aus Γ_z gibt, z beliebig, so daß

$$f(x - g) \leqq \varepsilon(\Gamma, f) \tag{1}$$

ist.

Hilfssatz 7: Es ist stets

---

[8] Abhandlungen II, S. 3ff.

[9] *E. Hlawka*, Math. Zeitschrift 49.

Nach *K. Mahler* Duke Journal 13 gilt sogar $J M^n \geqq 2\zeta(n) + {}^1/_6$.

Anmerkung bei der Korrektur: *Davenport* und *Rogers* haben diese Abschätzung zu $J M^n \geqq 4{,}921$ verschärft (Duke Journal 14).

$$\tfrac{1}{2} M_n(\Gamma, f) \leqq \varepsilon(\Gamma, f) \leqq \tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} M_i(\Gamma, f) \tag{2}$$

Beweis: Die linke Seite der Ungleichung folgt aus *Minowski*[2], Seite 226. Die rechte Seite zeigen wir so:

Die Vektoren $m_1, \ldots, m_n$ für die $f(m_i) = M_i$ ist, sind linear unabhängig. Jeder Punkt x läßt sich daher in der Gestalt $x = z + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i m_i$ darstellen. Es seien nun γ_i ganze Zahlen, so daß $|\lambda_i - \gamma_i| \leqq \tfrac{1}{2}$.

Der Punkt $g = z + \Sigma \gamma_i m_i$ gehört sicher Γ_z an. Dann ist

$$f(x-g) \leqq \Sigma |\lambda_i - \gamma_i| f(mi) \leqq \tfrac{1}{2} \Sigma M i$$

w. z. b. w.

Aus Hilfssatz 7 folgt

$$\varepsilon(\Gamma, f) \geqq \tfrac{1}{2} M_1(\Gamma, f) \tag{3}$$

Wir wollen jetzt schärfer folgendes zeigen:

Hilfssatz 8: Es ist

$$J \varepsilon^n(\Gamma, f) \geqq D\,[1 - \tfrac{1}{2}(1 - \tfrac{1}{2} z)^n]^{-1},\ z^n = J M_1^n D^{-1} \tag{4}$$

Beweis: Wir betrachten das Figurengitter $[\Gamma, f \leqq \varepsilon]$ und greifen einen Körper $\overline{K}$ heraus; sein Mittelpunkt p_1 ist Anfangspunkt eines Gittervektors g mit $f(g) = M_1(\Gamma, f)$. Der Körper des Figurengitters, dessen Mittelpunkt p_2, Endpunkt g ist, hat mit $\overline{K}$ einen Körper $\overline{K}'$ gemeinsam, nämlich $f(x - \tfrac{1}{2}(p_1 + p_2)) \leqq \varepsilon - \tfrac{1}{2} M_1$. Wir definieren nun in K eine Funktion $\varphi(x, \overline{K})$. Es ist

$$\varphi(x, \overline{K}) = \tfrac{1}{2}, \text{ wenn } x \text{ in } \overline{K}' \text{ und}$$
$$= 1 \text{ sonst in } K. \text{ Dann sei}$$

$\varphi(x) = \Sigma \varphi(x, \overline{K})$ ($\overline{K}$ durchlaufe alle Körper des Figurengitters).

Nun ist $\varphi(x) \geqq 1$ wegen der lückenlosen Überdeckung.

Wir betrachten jetzt das Parallelepiped $t P_a$ $(t > 1)$, wo P_a ein Elementarparallelepiped von Γ ist. Es enthält t^n Gitterpunkte von Γ. Die Körper von $[\Gamma, \overline{K}]$, deren Mittelpunkte in $P = t P_a$ liegen, überdecken dann ein Parallelotop $(t - c) P_a = \overline{\overline{P}}$, wo c von K abhängt. Sein Volumen ist $(t - c)^n D$. Dann ist $I = \int \varphi(x)\, d\, x \geqq (t - c)^n D$. Nun ist

$$I = \sum_{\overline{K} \subset \overline{P}} \int_{\overline{K}} \varphi(x, \overline{K})\, d\, x = \sum_{\overline{K} \subset \overline{P}} (J \varepsilon^n - \tfrac{1}{2}(\varepsilon - \tfrac{1}{2} M_1)^n) =$$
$$= t^n (J \varepsilon^n - \tfrac{1}{2}(\varepsilon - \tfrac{1}{2} M_1)^n).$$

Daraus folgt für $t \to \infty$

$$J \varepsilon^n - \tfrac{1}{2} J (\varepsilon - \tfrac{1}{2} M_1)^n \geqq D$$

Also ist zunächst $J\,\varepsilon^n \geqq D$. Daraus folgt:

$$J\,\varepsilon^n\,[1-\tfrac{1}{2}\,(1-\tfrac{1}{2}z)^n] \geqq J\,\varepsilon^n\,[1-\tfrac{1}{2}\,(1-\frac{J^{\frac{1}{n}}M_1}{J^{\frac{1}{n}}\,\varepsilon})^n] \geqq D \text{ w. z. b. w.}$$

Aus Hilfssatz 8 folgt, daß $J\,\varepsilon^n \geqq D$ ist. Bezeichnen wir mit *Minkowski*[2], § 32, einen Körper $f \leqq \tfrac{1}{2}\,M_1$ als $\frac{M}{2}$-Körper, wenn $J\,M_1^{\,n} = 2^n\,D$ ist, so folgt aus Hilfssatz 8, daß $J\,\varepsilon^n > D$, wenn f zu keinem $\tfrac{1}{2}\,M$-Körper gehört.

Definition 2:

$\varepsilon\,(f) = D^{-\frac{1}{n}}$ inf $\varepsilon\,(\Gamma, f)$ über alle Γ, mit $D\,(\Gamma) = D$ heißt absolute Exzentrizität.

Satz 1: Es gibt stets ein Gitter $\overline{\overline{\Gamma}}$ mit $D\,(\overline{\overline{\Gamma}}) = D$, so daß $\varepsilon\,(\overline{\overline{\Gamma}}, f) = \varepsilon\,(f)\,D^{\frac{1}{n}}$ ist. Wir nennen $\overline{\overline{\Gamma}}$ minimales Gitter. Es genügt, den Fall $D = 1$ zu beweisen.

Beweis: Aus der Definition von $\varepsilon\,(f)$ folgt, daß es sicher eine Folge $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$ mit $D\,(\Gamma_i) = 1$ gibt, so daß $\lim \varepsilon\,(\Gamma_i, f) = \varepsilon\,(f)$. Wir können annehmen, daß $\varepsilon\,(\Gamma_i, f) < 2\,\varepsilon$. Nun ist stets $\varepsilon\,(\Gamma_i, f) \geqq \tfrac{1}{2}\,M_n\,(\Gamma_i, f)$, also $\varepsilon > \tfrac{1}{4}\,M_i$. $(i = 2, 3, \ldots n)$. Aus Hilfssatz 1 folgt dann, daß

$$4^{n-1}\,J\,\varepsilon^{n-1}\,M_1\,(\Gamma_i, f) \geqq \frac{2^n}{n!}$$

also $M_1\,(\Gamma_i, f) \geqq c$, $c =$ Konstante, die nur von ε und f abhängt. Daraus folgt, daß für jedes g aus Γ_i $(i = 1, 2, \ldots)$, $f\,(g) \geqq c$ ist. Also auch $|g| \geqq c_1$. Aus dem Fundamentallemma von *K. Mahler*[6], S. 116, folgt, daß es eine unendliche Teilfolge $\{\Gamma_i'\}$ gibt, die gegen ein Gitter $\overline{\overline{\Gamma}}$ konvergiert, d. h. die Gittervektoren von Γ_i' streben gegen Gittervektoren von $\overline{\overline{\Gamma}}_i'$ Man sieht sofort, daß $\varepsilon\,(\overline{\overline{\Gamma}}, f) = \varepsilon\,(f)$.

Satz 2: Für die absolute Exzentrizität $\varepsilon\,(f)$ gilt:

$$[1-\tfrac{1}{2}\,(1-\tfrac{1}{2}\,V_0^{\frac{1}{n}})^n]^{-1} \leqq J\,\varepsilon^n \leqq (\frac{2}{n})^n\,V_0 \leqq n^n \qquad (5)$$

Dabei ist $V_0 = J\,M^n\,(f)$, wo $M\,(f)$ das absolute Minimum von f ist.

Beweis: Die linke Seite der Ungleichung folgt aus Hilfssatz 8. Die rechte Seite folgt aus Hilfssatz 7 und Hilfssatz 3, wenn für Γ das maximale Gitter genommen wird. Aus Hilfssatz 1 folgt dann der Rest der Behauptung.

Aus diesem Satz folgt, daß
$J\ \varepsilon^n\ (f) > 1$ ist, wenn f zu keinem $\frac{1}{2}$ M-Körper gehört.

Nach *Minkowski*, § 32—§ 34 ist für einen $\frac{1}{2}$ M-Körper $\varepsilon=1$, weiters ist der $\frac{1}{2}$ M-Körper ein Polyeder von höchstens $2\ (2^n—1)$ Seiten.

§ 4. Ein Satz über Figurengitter.

Wir betrachten nun, außer dem Figurengitter $[\Gamma, K]$ in einer Lage z, eine abgeschlossene, im *Jordan*schen Sinne meßbare Menge B. Weiters setzen wir voraus, daß $B + K$ ebenfalls einen *Jordan*schen Inhalt besitzt. Dabei verstehen wir unter $A_1 + A_2$, wo A_1, A_2 Mengen des R_n sind, die Menge der Punkte $x_1 + x_2$, wo x_1 in A_1, x_2 in A_2 liegt.

Satz 3: Ist $N\ ([\Gamma, K]z, B)$ die Anzahl der Körper aus dem Figurengitter $[\Gamma, K]$ in der Lage z, die mit B einen inneren Punkt gemeinsam haben, so ist

$$\int_P N\ ([\Gamma, K]_z, B)\, dz = V\ (B + K)$$

dabei ist P irgendein Elementarparallelepiped des Gitters Γ.

Beweis: Es sei $\alpha\ (x)$ folgende Funktion des R_n : $\alpha\ (x) = 1$, wenn B mit dem Körper K_x, der aus K durch Parallelverschiebung hervorgeht und x als Mittelpunkt hat, einen inneren Punkt gemeinsam hat, sonst sei $\alpha\ (x) = 0$. Jeder Gitterpunkt von Γ_z hat die Gestalt $z + g$, wo g Gittervektor von Γ ist. Dann ist, da $[\Gamma, P]$ den R_n einfach und lückenlos überdeckt

$$\int_P \Sigma_\Gamma \alpha\ (z + g)\, dz = \int_{Rn} \alpha\ (x)\, dx$$

Nun ist, nach Definition von $\alpha\ (x)$, $\alpha\ (x)$ dann und nur dann ungleich Null, wenn B mit K_x einen inneren Punkt gemeinsam hat. Das heißt, da K symmetrisch ist, wenn x innerer Punkt von $B + K$ ist. Es ist also

$$\int_{Rn} \alpha\ (x)\, dx = V\ (B + K)$$

Weiters ist $\Sigma\ \alpha\ (z + g)$ die Anzahl $N\ ([\Gamma, K]z, B)$ der Körper aus dem Figurengitter $[\Gamma, K]$ in der Lage z, die mit B einen inneren Punkt gemeinsam haben. Damit ist die Formel gezeigt.

Folgerung: Ist $N^0 = N^0\ ([\Gamma, K], B)$ das Maximum aller Zahlen N, ebenso $N_u = N_u\ ([\Gamma, K], B)$ das Maximum, dann ist

$$D\ (\Gamma)\ N^0 \geqq V\ (B + K) \tag{1}$$

$$D\ (\Gamma)\ Nu \leqq V\ (B + K) \tag{2}$$

Ist K ein Punkt, so stellt (1) im wesentlichen den *Blichfeldt*schen Satz dar (*Koksma*)[10].

Hilfssatz 9 (*Bonnesen-Fenchel*[11] 29, 32):

Ist B konvex, so ist $V(B+K) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} V_i(B, K)$, wo Vi die gemischten Volumina von B und K sind. Insbesondere ist V_0 das Volumnen $V(B)$ von B. Ist K die Einheitskugel E, so sind die $V_i(B, E)$ die Quermaßintegrale $W_i(B)$ von B.

§ 5. Extremale Punktverteilungen in konvexen Körpern.

Es sei B ein konvexer Körper, $f(x)$ die Distanzfunktion eines konvexen Körpers mit Mittelpunkt und d eine positive Zahl.

Definition 3: Eine Punktmenge P von B[12] heißt (f, d) Konfiguration von B, wenn

$$f(p_1 - p_2) \geqq d \tag{1}$$

ist, für alle p_1, p_2 von P.

Definition 4: Ist $s(P)$ die Anzahl der Punkte einer (f, d)-Konfiguration von B, so heißt P_0 extremale (f, d)-Konfiguration von B, wenn $s(P_0) = Max\ s(P)$ über alle (f, d)-Konfigurationen P von B ist. Es werde $s(P_0) = s(B, f, d)$ gesetzt.

Satz 4: Es ist stets $s(B, f, d) \cdot Jd^n \leqq 2^n V(B + K_1)$, wo J das Volumen des Eichkörpers $(f(x) \leqq 1$ und K_1 der Körper $f \leqq \frac{1}{2} d$ ist.

Beweis: Es sei P irgendeine (f, d)-Konfiguration von B. Dann greifen die Körper $f(x - p) \leqq \frac{1}{2} d$ nicht übereinander, wenn $p \varepsilon P$ ist und sie liegen alle in $B + K_1$. Damit ist Satz 4 gezeigt.

Folgerung: Ist B ein Körper $f(x) \leqq t\,d$, so ist

$$s(B, f, d) \leqq (2t + 1)^n \tag{2}$$

Definition 5: Es sei Γ ein Punktgitter in der Lage z. Dann heißt P eine (f, d)-Konfiguration von B eine Γ-Konfiguration, wenn alle Punkte von P, Γ_z angehören.

Eine (f, d)-Konfiguration P heißt extremale Γ-Konfiguration, wenn $s(\overline{P}) = max\ s(P')$ ist über alle Γ-Konfigurationen der Form (f, d) von B. Man setzt $s(\overline{P}) = s(B, \Gamma, f, d)$.

Es soll nun $s(B, \Gamma, f, d)$ nach oben und unten abgeschätzt werden.

Satz 5: Ist $M_1(\Gamma, f)$ das 1. Minimum von Γ, $D(\Gamma)$ die Determinante des Gitters Γ, so gilt für $s = s(B, \Gamma, f, d)$

---

[10] *Koksma*, Diophantische Approximationen, Springer 1935.

$$J\,d^n\,D^{-1}\,V\,(B) \leqq s\,J\,d^n \leqq D^{-1}\,J\,M_1{}^n\,V\,(B) + 2^n\,n!\,(V\,(B+n\,d\,F) - V\,(B)) \tag{3}$$

dabei ist F der Eichkörper $f \leqq 1$ und J sein Volumen.

Beweis: Ist P eine Γ-(f, d)-Konfiguration von B, so gilt nach *Definition 1*: $f\,(p_1 - p_2) \geqq d$, $(p_1 \neq p_2)$. Da p_1, p_2 zu einem Γ_z gehören, so muß $M_1\,(\Gamma, f) \geqq d$ sein.

Nach § 4 (1) gibt es ein z, so daß mindestens $V\,(B)\,D^{-1}\,(\Gamma)$ Punkte von Γ_z in B liegen (*Blichfeldt*scher Satz). Diese Punkte bilden sicher eine (f, d)-Konfiguration von B. Damit ist die untere Abschätzung von s bewiesen.

Wir wollen nun s nach oben abschätzen. Für die im folgenden benützten Sätze über gemischte Volumina verweisen wir auf *Bonnesen-Fenchel*, 29. Es sei $l_1, \ldots, l_n$ eine ausgezeichnete Basis, wie in § 2, von Γ und P_l das dazugehörige Parallelepiped. $P_l{}^*$ sei das Parallelepiped, welches aus P_l durch Verkürzung um $\lambda = d\,M_1{}^{-1} \leqq 1$ hervorgeht. Dann greifen die Parallelepipede aus dem Figurengitter $[\Gamma, P_l{}^*]$ sicher nicht übereinander, da dies auch beim Figurengitter $[\Gamma, P_l]$ nicht der Fall ist. Also ist der Gesamtinhalt dieser Parallelepipede, deren Mittelpunkte, Punkte der extremalen Γ-Konfiguration P sind, gleich $s\,D\lambda^n$. Sie liegen alle im konvexen Körper $B + P_l{}^*$, also

$$s\,D\,\lambda^n \leqq V\,(B + P_l{}^*) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\,V_1\,(B, P_l{}^*) \tag{4}$$

Es soll nun $V_i\,(B, P_l{}^*)$ für $1 \leqq i \leqq n$ abgeschätzt werden.

Wenn jetzt die Vektoren $l_1, \ldots, l_n$ als konvexe Körper, die von 0 ausgehen, aufgefaßt werden, so können wir schreiben

$$P_l{}^* = \lambda \sum_{i=1}^{n} l_i$$

Dann ist

$$V_i\,(B, P_l{}^*) = \lambda^i \sum_{\sigma_1 \cdots \sigma_i} V\,(\underbrace{B, \ldots, B}_{n-i}, l\,\sigma_1, \ldots l\,\sigma_i) \tag{5}$$

wo $\sigma_1, \ldots, \sigma_l$ alle Zahlen von 1 bis n durchlaufen. Nun verschwinden in dieser Summe alle Glieder, für die $l\,\sigma_i = l\,\sigma_j$ ist, also erstreckt sich die Summe nur über alle Variationen aus $\{1, \ldots, n\}$ zur i-ten Klasse. Wir setzen nun $l_i = t_i\,N_i$. Dann ist

$$V_i\,(B, P_l{}^*) = \lambda^i\,\Sigma'\,\Sigma\,N\sigma_1 \ldots N\sigma_i\,V\,(B, \ldots, B, t\sigma_1, \ldots, t\sigma_i) \tag{6}$$

wo die Summation sich über alle verschiedenen σ_i erstreckt.

Nun ist nach § 2 (4)

$$N\sigma_1 \dots N\sigma_i \leqq \sigma_1 \dots \sigma_i\, M\sigma_1 \dots M\sigma_i \leqq n!\, M\sigma_1 \dots M\sigma_i \,(\sigma_1 \neq \sigma_j) \quad (7)$$

Nun ist nach Hilfssatz 1, § 2

$$M_1^{n-i}\, M\,\sigma_1 \dots M\,\sigma_i \leqq 2^n\, D\, J^{-1}$$

also: $V_i(B, P_l^*) \leqq \lambda^i\, 2^n\, D\, J^{-1}\, M_1^{i-n}\, n!\, \sum\limits_{\sigma_1 \dots \sigma i} V\,(B, \dots, B, t\,\sigma_1 \dots t\,\sigma_i)$.

Setzen wir also $Q = \sum\limits_{i=1}^{n} t_i$, wo Q das Parallelelotop ist, erzeugt von $t_1, \dots, t_n$, so folgt

$$V_i\,(B, P_l^*) \leqq \lambda^i\, 2^n\, n!\, D\, J^{-1}\, M_1^{i-n}\, V_i\,(B, Q)$$

also

$$s\, D\, \lambda^n \leqq V\,(B) + 2^n\, n!\, J^{-1}\, D\, M_1^{-n} \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} (\lambda\, M_1)^i\, V_i\,(B, Q) =$$

$$= V\,(B) + \frac{2^n\, n!}{J\, M_1^{\,n}}\, D\,(V\,(B\, t\, \lambda\, M_1\, Q) - V\,(B)) \qquad (8)$$

Nun liegt Q im Körper $f\,(x) \leqq n$, also wenn wir mit F den Eichkörper $f \leqq 1$ bezeichnen, so ist

$$s\, D\, \lambda^n \leqq V\,(B) + (2\, M_1)^n\, n!\, D\, J^{-1}\,(V\,(B + \lambda\, n\, M_1 F) - V\,(B)) \quad (9)$$

Beachten wir nun, daß $\lambda = d\, M_1^{-1}$ ist, so folgt daraus die Behauptung.

Definition 6 (*Bonnesen-Fenchel* 35):

Es sei T ein konvexer Körper, dann heißt die größte Kugel, die ganz in T liegt, Inkugel, ihr Radius sei $\tau\,(T)$. Die kleinste Kugel, die T enthält, heißt Umkugel von T, ihr Radius sei $\varrho\,(T)$.

Definition 7: Ist B konvex, sind W_i die Quermaßintegrale von B, so heiße $\sum\limits_{i=1}^{n} \binom{n}{i} W_i\,(B)\, t^i$, $t > 0$ Quermaßsumme $O\,(B, t)$.

Es ist $O\,(B, 0) = 0$.

Gelten dieselben Voraussetzungen wie bei Satz 5 und ist $\varrho\,(F)$ der Umkugelradius des Eichkörpers F, so können wir s noch weiter abschätzen.

Es ist nach Definition des absoluten Minimums von f (§ 2):

$$M_1^n \leqq M^n\,(f)\, D\,(\Gamma).$$

Weiters ist nach Definition 6, F in seiner Umkugel enthalten, also wenn E die Einheitskugel ist, liegt F in $\varrho\,(F)\, E$. Daraus folgt aber, daß

$$V\,(B + n\, d\, F) \leqq V\,(B + n\, d\, \varrho\, E) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} W_i\,(B)\,(n\, d\, \varrho)^i =$$

$$= V\,(B) + O\,(B, n\, d\, \varrho) \qquad (10)$$

Berücksichtigen wir, daß bei der rechten Ungleichung von Satz 5, so erhalten wir:

Satz 5′: Es ist

$$J\,d^n\,D^{-1}(\Gamma)\,V(B) \leqq s\,J\,d^n \leqq J\,M^n\,V(B) + 2^n\,n!\,O(B, n\,d\,\varrho). \quad (11)$$

Definition 8: $s^*(B, f, d) = \max(B, \Gamma, f, d)$ über alle Gitter Γ.

Satz 6: Ist B ein konvexer Bereich, $f(x)$ die Distanzfunktion eines konvexen Körpers K, ϱ der Umkugelradius, J das Volumen des Eichkörpers, $M(f)$ das absolute Minimum, so ist:

$$J\,M^n\,V(B) \leqq s^*(B, f, d)\,J\,d^n \leqq J\,M^n\,V(B) + 2^n\,n!\,O(B, n\,d\,\varrho) \quad (12)$$

dabei ist $O(B, n\,d\,\varrho)$ nach Definition 5 die Quermaßsumme.

Beweis: Die rechte Seite der Umgleichung folgt aus Satz 5′. Wir wählen nun für Γ das maximale Gitter $\overline{\Gamma}$ mit der Determinante $(d\,M^{-1})^n$ für welches also $M_1(\overline{\Gamma}, f) = M\,\overline{D^n} = d$ ist (§ 2, Hilfssatz 2).

Dann ist nach (11): $s^*(B, \overline{\Gamma}, f, d)\,J\,d^n \geqq J\,M^n\,V(B)$.

Damit ist Satz 6 gezeigt.

Folgerung: $\lim\limits_{d \to 0} \dfrac{J\,d^n\,s^*(B, f, d)}{V(B)}$ existiert und ist gleich $J\,M^n(f)$.

Wir wollen das eben betrachtete Problem noch verallgemeinern.

Definition 9: Eine Punktmenge P vom Bereich B heißt (k, f, d)-Konfiguration von B, wenn es zu einem Punkt $p_1 \varepsilon P$ höchstens $2(k-1)$ Punkte p_2 aus P gibt, so daß $f(p_1 - p_2) < d$ ist.

Gehören alle Punkte von P zugleich einem Gitter Γ_z an, so heißt P eine (Γ, k, f, d)-Konfiguration. Die Anzahl von P werde mit $\overset{k}{s}(P)$ bezeichnet. Die (k, f, d), bzw. (Γ, k, f, d)-Konfiguration P heißt extremal, wenn $\overset{k}{s}(P) = \max \overset{k}{s}(P')$ über alle (k, f, d), bzw. (Γ, k, f, d)-Konfigurationen ist. Wir setzen $\overset{k}{s}(P) = \overset{k}{s}(B, f, d)$, bzw. $\overset{k}{s}(B, \Gamma, f, d)$. Es soll nun $\overset{k}{s}(B, \Gamma, f, d)$ abgeschätzt werden. Zunächst muß $M_1(\Gamma, f) \geqq d$ sein. Es gilt dann:

Satz 7:

$$J\,d^n\,D^{-1}(\Gamma)\,V(B) \leqq \overset{k}{s}\,J\,d^n \leqq J\,\overset{k}{M}_1^n\,V(B) + 2^n\,n!\,k^n\,O(B, n\,d\,\varrho) \quad (13)$$

Beweis: Er erfolgt analog wie bei Satz 5, bzw. 5′. Es wird das Figurengitter $[\Gamma, P_l'']$, wo jetzt P_l'' aus P_l durch Verkürzung um $\bar{\lambda} = d\,\overset{k}{M}_1^{-1} \leqq 1$

[11] *Bonnesen-Fenchel*, Theorie der konvexen Körper, Springer 1934. Die Zahlen bedeuten die Abschnitte des Buches.

hervorgeht. Die obigen Überlegungen bis (9) bleiben ungeändert, wenn λ durch $\bar{\lambda}$ ersetzt wird. Multiplizieren wir die so entstehende Gleichung mit $\overset{k}{M}_1$, so kommt

$$J\, D\, d^n\, \overset{k}{s} \leqq J\, \overset{k}{M}_1{}^n\, V(B) + 2^n n!\, D\,.\,(V(B + n\, d\, \overset{k}{M}_1\,.\, M_1^{-1} F) - V(B)) \tag{14}$$

Nun ist nach Hilfssatz 5

$M_1 \leqq k\, M_1$, also der zweite Summand in (14)

$$\leqq 2^n n!\, D\,.\,(V(B + n\, d\, k\, F) - V(B))$$

Die weitere Abschätzung erfolgt wie bei Satz 5′.

Definition 10:

$$\overset{k}{s}(B, f, d) = \max \overset{k}{s}(B, \Gamma, f, d) \text{ über alle } \Gamma.$$

Satz 8: Es ist

$$J\, \overset{k}{M}{}^n\, V(B) \leqq \overset{k}{s}(B, f, d)\, J\, d^n \leqq J\, \overset{k}{M}{}^n\, V(B) + 2^n n!\, k^n\, O(B, n\, d\, \varrho) \tag{15}$$

Dabei ist $\overset{k}{M}$ das absolute k-Minimum von f.

Beweis: Die rechte Seite der Ungleichung folgt aus Satz 7. Die linke Seite erhalten wir, wenn man in Satz 7, ein Gitter Γ mit $D^{\frac{1}{n}} = \mathrm{d}\, \overset{k}{M}{}^{-1}$ nimmt.

§ 6. Gitterförmige Ausfüllung konvexer Körper durch konvexe mit Mittelpunkt.

Es sei ein konvexer Bereich B gegeben, der jetzt innere Punkte besitzen soll. Der Inkugelradius sei $\beta(B)$. Der Ursprung o soll Mittelpunkt einer Inkugel sein. Es sei r eine positive Zahl und $K = K(r)$ der Körper $f(x) \leqq r$. Wir setzen stets für r voraus, daß der Umkugelradius $\varrho(K) < \beta$ ist. Das Volumen $V(K) = J\, r^n$.

Definition 11: Eine Punktmenge A von B[12] heißt eine $K(r)$-Ausfüllungskonfiguration, wenn:

1. A eine $(f, 2r)$-Konfiguration ist, f ist Distanzfunktion von K;
2. die Körper $f(x - p) \leqq r$, wo p in A, ganz in B liegen.

Ausfüllungskonfigurationen sollen immer mit $A - K(r)$ bezeichnet werden. Diese Definition besagt, daß die Körper $f(x - p) \leqq r$, wo p in A, nicht übereinandergreifen und ganz in B liegen. Die Anzahl der Punkte von A werde mit $a(A)$ bezeichnet.

[12] B braucht nicht konvex zu sein.

Definition 12: Eine Ausfüllungskonfiguration $A_0 - K(r)$ heißt maximal, wenn $a(A_0) = \max a(A)$ ist, über alle $A - K(r)$. $a(A_0)$ bezeichnen wir mit $a(B, K(r))$, die „Maximalanzahl der Körper K, die in B eingelagert werden können." $a(B, K(r)) J r^n = S(B, K(r))$ ist das Gesamtvolumen der Körper K, die in B eingelagert werden können.

Aus der Definition folgt sofort:

$$S(B, K(r)) \leqq V(B) \tag{1}$$

Definition 13: Ist Γ ein Punktgitter in der Lage z, dann heißt eine Ausfüllungskonfiguration $A\ K(r)$ von B eine Γ-Ausfüllungskonfiguration, wenn alle Punkte von A, Γ_z angehören. Eine Konfiguration $A^* - K(r)$ heißt maximale, gitterförmige Ausfüllungskonfiguration, wenn $a(A') = \max a(A)$ über alle Γ-Konfigurationen der Form $A - K(r)$

Wir setzen: $a(A'') = a''(B, \Gamma, K(r))$.

Definition 14: $a^*(B, K(r)) = \max a^*(B, \Gamma, K(r))$ über alle Gitter Γ.

a^* nennen wir die Maximalanzahl der Körper, die in B gitterförmig eingelagert sind, und nicht übereinandergreifen. $S^*(B, K(r)) = a^* J r^n$ ist das Gesamtvolumen der gitterförmig eingelagerten Körper.

Aus der Definition 14 und § 5, 8 folgt sofort

$$a^*(B, K(r)) \leqq s^*(B, f, 2r) \tag{2}$$

Es soll nun a^* nach unten abgeschätzt werden.

Hilfssatz 10: Ist $B_1 = (1 - \frac{\varrho}{\beta}) B$, so ist

$$a^*(B, K(r)) \geqq s^*(B_1, f, 2r) \tag{3}$$

Beweis: Es sei P eine $(f, 2r)$-Konfiguration von B_1. Dann liegen die Körper $f(x - p) \leqq r$ ganz in B. Zunächst liegen sie ganz in $B_1 + K$. $B_1 + K$ liegt aber in B. Es ist nämlich seine Stützfunktion $H_1(n)$ in irgendeiner Richtung (u = Einheitsvektor)

$$\leqq (1 - \frac{\varrho}{\beta}) H(u) + \overline{H}(u)$$

Dabei sei $H(u)$ die Stützfunktion von B und $\overline{H}(u)$ die von K.

Daraus folgt

$$H_1(u) \leqq H(u) - \frac{\varrho}{\beta} \beta + \varrho = H(u)$$

Dies gilt für jedes u. Dabei wurde benützt, daß

$$H(u) \geqq \beta \text{ ist.}$$

Für die benützten Eigenschaften der Stützfunktion sei auf *Bonnesen-Fenchel*, 15, verwiesen.

Satz 9: Besitzt der Körper K das Volumen $J\,r^n$ und ist sein Umkugelradius ϱ kleiner als der Inkugelradius β des konvexen Bereiches B, so gilt für das Gesamtvolumen $S^*\,(B,\,K\,(r))$ der Körper K, die in B, maximal gitterförmig eingelagert werden können:

$$(1-\frac{\varrho}{\beta})^n\,J\,(\frac{M}{2})^n\,V\,(B) \leqq S^*\,(B,\,K\,(r)) \leqq \mathrm{Min}\,[V\,(B), J\,(\frac{M}{2})^n\,V\,(B) + \\ + n!\,O\,(B,\,2\,n\,\varrho)], \tag{4}$$

dabei ist M das absolute Minimum der Distanzfunktion von K, J das Volumen des Eichkörpers und

$$O\,(B,\,2\,n\,\varrho) = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i}\,W_i\,(B)\,(2\,n\,\varrho)^i \tag{5}$$

Die $W_i\,(B)$ sind die Quermaßintegrale von B.

Beweis: Der Satz folgt aus Satz 6, § 5 (1) und Hilfssatz 10.

Folgerung: $$\lim_{r\to 0} \frac{S^*\,(B,\,K\,(r))}{V\,(B)} = J\,(\tfrac{1}{2}\,M\,(f))^n \tag{6}$$

Eine analoge Formel gilt für $S^*\,(B,\,\Gamma,\,K\,(r)) = a^*\,(B,\,\Gamma,\,K\,(r))\,J\,r^n$, nämlich

$$(1-\frac{\varrho}{\beta})^n\,J\,V\,.D^{-1}\,r^n \leqq S^*\,(B,\Gamma,K) \leqq J\,(\tfrac{1}{2}\,M)^n\,V\,.D^{-1} + n!\,O\,(B,2n\,\varrho) \tag{7}$$

wie sofort aus Satz 5′ folgt.

Nehmen wir jetzt für Γ das maximale Gitter $\bar{\Gamma}$ mit $D = (\frac{2\,r}{M})^n$ und $M_1\,(\bar{\Gamma}, f) = 2\,r$, so gelten für $S^*\,(B,\,\bar{\Gamma},\,K)$ dieselben Schranken, wie für $S^*\,(B,\,K)$.

Bezeichnen wir die Schranken mit C_1 und C_2, so gilt

$$C_1 \leqq S^*\,(B,\,\bar{\Gamma},\,K) \leqq S^*\,(B,\,K) \leqq C_2$$

Daraus folgt:

Satz 10: $S^*\,(B,\,\bar{\Gamma},\,K)$ ist asymptotisch gleich $S^*\,(B,\,K)$ für $r \to 0$

Definition 15:

$\Delta^*\,(f) = \lim_{r\to 0} \frac{S^*\,(B,K)}{V\,(B)}$ heißt Dichte der gitterförmigen, maximalen Lagerung durch Körper mit der Distanzfunktion f.

Es ist daher aus der Folgerung von Satz 9

$$\Delta^*(f) = J(\tfrac{1}{2}M)^n < 1$$

wenn f zu keinem $\frac{1}{2}M$-Körper gehört (vgl. § 3).

Nach Hilfssatz 4, § 2 ist $\Delta^*(f)$ immer $\geqq 2^{1-n}\zeta(n)$.

Wir können nun nach dem inf $\Delta^*(f)$ über alle konvexen Körper fragen. Da $\Delta^*(f)$ nur von der Eichfunktion abhängt, können wir auch sagen:

Welche Eichfunktion liefert die kleinste Dichte oder anders ausgesprochen, „die dünnste, dichteste gitterförmige Lagerung?" Für $n = 2$ wurde dies von *Reinhardt*[13] und *Mahler*[14] behandelt.

Definition 16: Eine Punktmenge A_k von B heißt eine $k - K(r)$-Ausfüllungskonfiguration, wenn sie

1. eine $(k, f, 2r)$-Konfiguration von B ist und
2. die Körper $f(x - p) \leqq r$, wo p in A_k, ganz in B liegen.

Gehören alle Punkte von A_k zugleich einem Gitter Γ_z an, so heißt A_k eine Γ-Ausfüllungskonfiguration $A_k - \Gamma - K(r)$.

Die Anzahl der Punkte von A_k werde mit $a(A_k)$ bezeichnet. Eine Ausfüllungskonfiguration A_k o, bzw. A_{k0}^* heißt eine maximale, bzw. eine maximale gitterförmige Ausfüllungskonfiguration, wenn $a(A_{k0}) = \max a(A_k)$, bzw. $a(A_{k0}^*) = \max(A_k)$ über alle gitterförmigen $A_k - K(r)$.

Wir setzen $a_k^* = a(A_{k0}^*$ und $S_k^*(B, K(r)) = a_k^* J r^n$ (8)

Nach Definition 16 dürfen die in B eingelagerten Körper jetzt übereinandergreifen, aber nur mit höchstens $2(k-1)$.

Dann gilt für die Maximalanzahl $a_k^*(B, K(r))$, bzw. für das Gesamtvolumen $S^*(B, K(r))$ der gitterförmig eingelagerten Körper:

Satz 11:

$$(1 - \frac{\varrho}{\beta})^n J(\tfrac{1}{2}\overset{k}{M})^n V(B) \leqq S_k^*(B, K(r)) \leqq J(\tfrac{1}{2}\overset{k}{M})^n V(B) + n!\, k^n O(B, 2nr\varrho) \quad (9)$$

Dabei ist M das absolute k-Minimum von f (§ 2).

Der Satz wird genau so bewiesen wie Satz 9, unter Heranziehung des Satzes 8, § 5.

Folgerung:

$$\Delta_k^*(f) = \lim_{r\to 0} \frac{S_k^*(B, K(r))}{V(B)} = J(\tfrac{1}{2}\overset{k}{M})^n \quad (10)$$

[13] Hamburger Abhandlungen 10.
[14] Proceedings Amsterdam 50 (1947).

§ 7. Ausfüllung konvexer Körper durch konvexe mit Mittelpunkt.

Es soll jetzt $a\,(B, K\,(r))$, bzw. $S\,(B, K\,(r)) = a\,(B, K)\,J\,r^n$, die in Definition 12 definiert wurden, abgeschätzt werden. Es wird also jetzt nicht mehr vorausgesetzt, daß die Ausfüllung von B durch Körper $K\,(r)$ gitterförmig ist. Aus Definition 14 folgt, daß

$$a\,(B, K) \geqq a^*\,(B, K),\ S\,(B, K) \geqq S^*\,(B, K) \tag{1}$$

ist. Wir wollen jetzt a ,bzw. S nach oben abschätzen.

Definition 17: Ist R ein Polyeder von kleinstem Volumen, welches

1. dem Körper $K : f \leqq r$ umschrieben ist,
2. von höchstens z^n-Seiten ist,

dann sei $\varphi_z\,(f) = \dfrac{V\,(R)}{V\,(K)}$.

φ hängt, wie man sofort sieht, nur von der Distanzfunktion f ab.

Satz 12: Es ist stets $\varphi_z \geqq 1$. Ist K kein Polyeder von höchstens $2\,[\frac{z^n}{2}]$ Seiten, so ist $\varphi_z > 1$. Dies ist stets dann der Fall, wenn K kein Polyeder ist.

Beweis: Die 1. Behauptung ist trivial. Die 2. Behauptung begründet man folgendermaßen: Ist $\varphi_z = 1$, so muß K ein Polyeder von höchstens z^n-Seitenflächen sein. Da aber $2\,[\frac{z^n}{2}]$ symmetrisch ist, kann es höchstens $2\,[\frac{z^n}{2}]$ sein.

Definition 18: Ist $\varkappa\,(K)$ der Inkugelradius von $K : f \leqq r$, $\varrho\,(K)$ der Umkugelradius von K, δ eine beliebige positive Zahl, χ_m das Volumen der m-dimensionalen Einheitskugel, so sei

$$\omega\,(f, \delta) = 1 + \frac{\chi_{m-1}}{\chi_m}\,\frac{\delta^n}{(1+\delta)^{n-1}}\left(\frac{\varkappa}{\varrho}\right)^n \tag{2}$$

Hilfssatz 11: Es sei $K : f \leqq r$, $\overline{K} : f \leqq (1+\delta)\,r$, $\delta > 0$.

Weiters sei T ein konvexer Körper, der K enthält und in $\overline{K}$ liegt. Haben T und $\overline{K}$ Randpunkte gemeinsam, so ist

$$V\,(T) \geqq \omega\,(f, \delta)\,V\,(K) \tag{3}$$

Beweis: Die Stützfunktion $H\,(u)$ von K mit $u^2 = 1$ ist nach Definition von K stets $\geqq \varkappa$, die von $\overline{K}$ stets $\geqq (1+\delta)\,\varkappa$. Als Inkugel I

nehmen wir die, welche O als Mittelpunkt besitzt. Nun soll T mit dem Rand von $\overline{K}$ mindestens einen Punkt gemeinsam haben. Es sei $\bar{p}$ ein solcher. Dann betrachten wir den Durchstoßpunkt p des Halbstrahles $\overrightarrow{o\,\bar{p}}$ mit K und die zugehörige Stützebene ε (oder eine von denen). Der Abstand $\bar{p}$ von ε ist gleich $\delta . \varepsilon\, o$, wo $\varepsilon\, o$ der Abstand der Ebene ε von o ist. Wir bringen nun den Kappenkörper von K (*Bonnesen-Fenchel*, 12) mit $\bar{p}$ als Eckpunkt zum Schnitt mit ε. Der so entstandene Kegel hat sicher eine Höhe $\delta . \bar{\varepsilon}\, o \geqq \delta \varkappa$. Nun schneidet jene Ebene, welche parallel zu ε ist und durch o geht, aus dem Kappenkörper einen Bereich aus, der sicher eine $(n-1)$-dimensionale Kugel mit dem Radius $\varkappa$ enthält. Also schneidet die Ebene ε aus dem Kegel einen Bereich aus, der eine $(n-1)$-dimensionale Kugel vom Radius $\dfrac{\delta}{1+\delta}\,\varkappa$ enthält. Dabei ist das Volumen des Kegels mindestens $\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{\delta}{1+\delta}\varkappa\right)^{n-1} \chi_{n-1}\,\delta\,\varkappa$. Dieser Kegel hat mit K keinen Punkt gemeinsam, da die beiden Körper durch ε getrennt werden.

Es ist also

$$V(T) - V(K) \geqq \frac{1}{n}\ \chi_{n-1}\ \frac{\delta^n}{(1+\delta)^{n-1}}\ \varkappa^n$$

Nun ist $V(K) \leqq \chi_n \varrho^n$, also ist

$$V(T) \geqq \omega(f, \delta)\, V(K) \text{ w.z.b.w.}$$

Satz 13: Ist $0 < \delta < (2 \cdot 3^n n^2)^{-1}$,

$$\tau(f) = \operatorname{Min}(\omega(f, \delta), \varphi_3(f)) \qquad (4)$$

$$\text{so ist } S(B, K) \leqq \frac{1}{\tau} V(B + \delta K) \leqq \frac{1}{\tau}(V(B) + O(B, \delta \varrho)) \qquad (5)$$

Dabei ist die Quermaßsumme O in Definition 7, § 5, ω, φ_3 in Definition 17 und 18 festgelegt.

Beweis: Die Mittelpunkte der Körper $K(r)$, die in B liegen, bezeichnen wir mit p_i und die zugehörigen Körper $f(x - p_i) \leqq r$ mit K_i $f(x - p_i) \leqq (1+\delta) r$ mit $\overline{K}_i$. Diese liegen alle in $B + \delta K$.

Die Punkte $q_{ij} = \frac{1}{2}(p_i + p_j)$ nennen wir Halbierungspunkte. Sie liegen wieder in B. Wir wollen zunächst die Anzahl $s+1$ der Halbierungspunkte q_{ij}, die in $\overline{K}_i$ liegen, abschätzen. Nun ist, da die K_i nicht übereinandergreifen, $f(p_i - p_j) \geqq 2r$, also $f(q_{ij} - q_{ik}) \geqq r$.

Die $q_{i\,j}$ bilden also eine (f, r)-Konfiguration von $\overline{K}_i$. Also ist nach. der Folgerung von Satz 4 mit $t = 1 + \delta$, $s + 1 \leqq (3 + 2\,\delta)^n \leqq 3^n + 1$[15] Daher ist die Anzahl s der $q_{i\,j}$ mit $j \neq i$, höchstens 3^n. Der Körper $K : f \leqq r$ besitzt in jedem seiner Randpunkte eine Stützebene. Ist der Randpunkt singulär, so sei eine seiner Stützebenen willkürlich ausgewählt, aber so, daß in Bezug auf o symmetrisch gelegene Randpunkte von K parallele Stützebenen besitzen. Dies ist stets möglich. Ist nun q ein Halbierungspunkt $q_{i\,j}$ $(j \neq i)$ in $\overline{K}_i$, so betrachten wir jene Ebene durch q, die zu der Stützebene parallel ist, welche der Durchstoßpunkt des Halbstrahles durch o mit dem Richtungsvektor $\overrightarrow{p_{ij}\,q}$ mit K besitzt. Dies wird für alle $q_{i\,j}$ $(j \neq i)$ durchgeführt. Wir erhalten so höchstens 3^n Ebenen. Der Durchschnitt der Halbräume dieser Ebenen, die K_i enthalten, mit $\overline{K}$ bildet einen konvexen Körper L_i, der nicht notwendigerweise einen Mittelpunkt besitzen muß. Es liegt L_i in $\overline{K}_i$ und er enthält K_i. Diese L_i greifen nicht übereinander. Hätten nämlich L_i und L_j $(i \neq j)$ einen Punkt gemeinsam, dann auch $\overline{K}_i$ und $\overline{K}_j$. Diese hätten dann auch $q_{i\,j}$ gemeinsam. Dann können wir oben eine Ebene durch $q_{i\,j}$ legen, welche sowohl Stützebene von L_i wie von L_j ist, also L_i und L_j trennt.

Es ist also

$$\Sigma\, V(L_i) \leqq V(B + \delta\, K) \tag{6}$$

Wir müssen nun zwei Fälle unterscheiden:

1. L_i hat mit dem Rand von $\overline{K}_i$ einen Punkt gemeinsam.
   Dann ist nach Hilfssatz 11: $V(L_i) \geqq \omega\, V(K_i)$ oder
2. dies ist nicht der Fall, dann ist L_i ein Polyeder von höchstens 3^n Seiten.
   Dann ist nach Definition 17: $V(L_i) \geqq \varphi_3\, V(K_i)$.
   Daher haben wir in beiden Fällen

$$V(L_i) \geqq \tau\, V(K) = \tau\, J\, r^n$$

Also ist

$$S(B, K) = a(B, K)\, J\, r^n \leqq \frac{1}{\tau}\, V(B + \delta\, K) \tag{7}$$

Nun liegt K im Körper $\varrho\, E$ (E Einheitskugel).

Also ist $V(B + \delta\, K) \leqq V(B) + O(B, \delta\, \varrho)$.

---

[15] Man benütze die Ungleichungen

$$(1 + \frac{a}{n^2})^n \leqq 1 + a\ (a < 1),\ (1 - a)^{-1} < 1 + 2a\ (a < {}^1/_2).$$

Damit ist der Satz bewiesen.

Mit Hilfe des eben gewonnenen Satzes läßt sich Satz 4 verschärfen.

Satz 14: Mit denselben Bezeichnungen wie in Satz 4 gilt:

$$s\,(B, f, d)\,J\,d^n \leqq \frac{2^n}{\tau\,(f)}\,V\,(B + (1+\delta)\,K_1) \tag{8}$$

Beweis: Er erfolgt wie bei Satz 4, nur wird jetzt statt der trivialen Abschätzung $s\,J\,(\frac{1}{2}\,d)^n \leq V\,(B + K_1)$ Satz 13 benützt.

Wir stellen jetzt eine Verallgemeinerung von Satz 13 auf.

Satz 15: Es sei $\alpha > 0$, $\alpha \leqq 1$,

$$l = \frac{1}{\alpha},\ L = (2\,l^2+1)^n,\ h^n = [L],\ 0 < \delta_l < \frac{1}{(l+1)\,n^2\,L} \tag{9}$$

$$\tau_l\,(f) = \mathrm{Min}\,(\omega\,(f, \delta_l), \varphi\,n\,(f)) \tag{10}$$

dann gilt für $S_\alpha(B, K(r)),$ = Supremum der Gesamtinhalte aller Körper von der Form $f\,(x - p) \leqq \bar{r}$ wo $\alpha\,r \leqq \bar{r} \leqq r$, die ganz in B liegen

$$S_\alpha\,(B, K\,(r)) \leqq \frac{1}{\tau_l}\,V\,(B + \delta_l\,r\,F)$$

wo F der Eichkörper $f \leqq 1$ ist.

Ist $\alpha = 1$, so erhalten wir Satz 13.

Beweis: Wir gehen wie in Satz 13 vor. Die Körper $f\,(x - p_i) \leq r_i$, die in B liegen, bezeichnen wir mit K_i und $f\,(x - p_i) \leqq (1 + \delta_l)\,r_i$ mit $\overline{K}_i$. Diese liegen alle in $B + \delta_l\,.\,rF$. Jetzt betrachten wir die Punkte $q_{ij} = \dfrac{r_i\,p_j + r_j\,p_i}{r_i + r_j}$. Es soll nun die Anzahl $s + 1$ der $q_{i\,j}$ die in $\overline{K}_i$ liegen, abgeschätzt werden. Zunächst folgt aus $f\,(q_{i\,j} - p_i) \leqq r_i$, wo $c = 1 + \delta_l$ ist: $f\,(p_j - p_{\,i}) \leqq c\,(r_i + r_j$. Nun greifen die K_i nicht übereinander, also gilt $f\,(p_j - p_k) \geqq r_j + r_k\ (j \neq k)$.

Daraus folgt durch einfache Abschätzung[16]

$$f\,(q_{i\,j} - q_{i\,k}) \geqq \frac{\alpha^2}{2}\,(1 + \alpha - c\,(1-\alpha))\,r = \gamma\,r$$

Die Folgerung von Satz 4 mit $t = (1+\delta_l)\,\dfrac{r_i}{\gamma\,r}$, angewendet auf $\overline{K}_i$ liefert[14] $s + 1 \leq L + 1$, also ist die Anzahl s der $q_{i\,j}$ mit $j \neq i$ höchstens h^n. Nun geht der Beweis wie bei Satz 13 zu Ende.

---

[16] Es ist ja $2\,(q_{ij} - q_{ik})\,r_{ij}\,r_{ik} = (r_{ij} + r_{ik})\,(p_i - p_k) - (r_i - r_k)\,(p_k + p_j - 2p_i)$ wo $r_{il} = r_i + r_l$ und $\alpha\,r \leqq r_i \leqq r$ ist.

§ 8. λ-Körper.

Es soll $\varphi_z(f)$ gegeben durch Definition 17 für eine spezielle Klasse von konvexen Körpern nach unten abgeschätzt werden.

Definition 19: Ein konvexer Körper K heißt λ-Körper, wenn es ein $\lambda > 0$ gibt, so daß folgendes gilt[17]: Es sei F eine Ebene, die K schneidet, F die Stützebene von K, welche zu F parallel und ihm am nächsten ist. Es sei $d(F)$ der Abstand der beiden Ebenen und $T(F)$ der n—1 dimensionale Inhalt des Durchschnittes von K und F. Dann sei stets für jede solche Ebene F . $T(F) \leqq [\lambda\, d(F)\, \varrho(K)]^{\frac{n-1}{2}}$. Dabei sei $\varrho(K)$ der Umkugelradius von K.

Satz 15: Ist K ein λ Körper und $\varkappa(K)$ sein Inkugelradius, dann ist $\varphi_z \geqq 1 + c\,(\frac{\varkappa}{\varrho})$, wo c nur von λ und z abhängt.

Beweis: Es sei L ein Polyeder von höchstens z^n Seiten. Die Seiten bezeichnen wir mit L und ihre n—1 dimensionale Inhalte mit $J(\mathsf{L})$. Aus der isoperimetrischen Ungleichung folgt

$$(\Sigma J(\mathsf{L}))^n\, V(L)^{1-n} \geqq n^n\, \chi_n = c_2$$

also $\Sigma J(\mathsf{L}) \geqq c_3\, V(L)^{1-\frac{1}{n}}$.

Nun ist die Anzahl der L höchstens z^n. Es gibt also mindestens eine Seitenfläche L, so daß

$$J(\mathsf{L}) \geqq c_4\, V^{1-\frac{1}{n}}(L) \tag{2}$$

Wir betrachten nun die zu L am nächsten gelegene Stützebene E an K, die zu L parallel ist. Ihr Abstand von o sei l ebenso der Abstand von L an o sei s. Dann ist $s \geqq l \geqq \varkappa$. Wir betrachten weiter die Pyramide P mit L als Basis und o als Spitze, die sicher in L liegt.

Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

1. $(\lambda\, l\, \varrho)^{\frac{n-1}{2}} \leqq \dfrac{1}{2\,n}\, J(\mathsf{L})$.

---

[17] Eine eng verwandte Definition bei *van der Corput* Davenport Proc., Amsterdam 49, S. 701. Die Verfasser betrachten den gitterförmigen Fall. Hier haben die Polyeder höchstens 2 (2^n—1) Seitenflächen und Mittelpunkt.

Wichtig wäre die Lösung des folgenden Problems: Gibt es zu einem konvexen Körper K mit Mittelpunkt 0 stets ein Polyeder mit $2s$ Seitenflächen (s vorgegeben) mit minimalen Volumen, welches K umgeschrieben ist und 0 als Mittelpunkt hat. Für den R_2 wurde das Problem von *Dowker* (Bull. Amer. Soc. 50 (1944) S. 120) gelöst.

Es ist sicher $V(L) - V(K) \geqq V(P) - V(P \cap K)$ (3)

Zunächst ist $V(P) = \frac{1}{n} J(\mathsf{L})\, s \geqq \frac{1}{n} J(\mathsf{L})\, l.$

Wir müssen nun $V(P \cap K)$ nach oben abschätzen. Wir betrachten die Ebene durch o parallel zu L, die K in zwei volumsgleiche Teile K' und K'' teilt.

Dann ist $V(P \cap K) \leq V(K')$. Nun ist der Abstand $d(F)$ jeder Ebene F, welche parallel zu L ist und K schneidet $\leqq l$.

Also ist

$$V(K') \leqq \frac{1}{2n} J(\mathsf{L})\, l \tag{4}$$

Es ist also $V(L) - V(K) \geqq \frac{1}{2n} J(\mathsf{L})\, l \geqq \frac{C_4}{2n} l\, V^{1-\frac{1}{n}}(L) \geqq$

$\frac{C_4}{2n} \varkappa\, V^{1-\frac{1}{n}}(K)$.

Nun ist wieder $V(K) \leqq \chi_n \varrho^n$, also

$$V(L) \geqq V(K)\left(1 + c_5 \left(\frac{\varkappa}{\varrho}\right)^n\right) \tag{5}$$

2. Es sei nun $(\lambda\, l\, \varrho)^{\frac{n-1}{2}} > \frac{1}{2n} J(\mathsf{L})$.

Wir setzen $T = \left(\frac{1}{2n} J(\mathsf{L})\right)^{\frac{2}{n-1}} \frac{1}{\lambda\, \varrho}$. Dann ist zunächst $T < l$.

Wir betrachten noch die Ebene $\bar{E}$, welche zu E und L parallel ist, und von o den Abstand T hat. Die Ebene $\bar{E}$ schneidet von der Pyramide P einen Pyramidenstumpf P_1 ab, mit der Basis L und der Deckfläche $\bar{\mathsf{L}}$.

Dann ist wieder

$$V(L) - V(K) \geqq V(P_1) - V(P \cap K).$$

Es sei P_2 die Pyramide mit $\bar{\mathsf{L}}$ als Basis und der Höhe $l - T$. Dann ist

$$V(P_2) = \left(\frac{l - T}{s}\right)^n V(P)$$

also $V(P_1) = V(P)\left(1 - \left(\frac{l - T}{s}\right)^n\right) \geqq V(P) \frac{T}{l} = \frac{J(\mathsf{L})}{n} T.$

Weiter ist ganz analog wie unter 1. $V(P \cap K) \leqq \frac{1}{2n} J(\mathsf{L})\, T$, da

wieder $T(F) \leqq (\lambda\, \varrho\, d(F))^{\frac{n-1}{2}} \leqq (\lambda\, \varrho\, T)^{\frac{n-1}{2}} = \frac{1}{2n} J(\mathsf{L})\, T$ ist, da ja nur jene F in Frage kommen, für die $d(F) \leqq T$ ist.

Also erhalten wir

$$V(L) - V(K) \geqq \frac{J(\mathsf{L})\, T}{2n} \geqq \frac{J(\mathsf{L})}{2n} \left(\frac{1}{2n}\, J(\mathsf{L})\right)^{\frac{2}{n-1}} \frac{1}{\lambda\, \varrho}$$

also $V(L) - V(K) \geqq c_c\, V^{1+\frac{1}{n}}(L) \frac{1}{\lambda\, \varrho}$.

Nun ist $V(L)^{1+\frac{1}{n}} \geqq V(K)\, \chi_n^{\frac{1}{n}}\, \varkappa$, da $V(K) \leqq \chi_n\, \varkappa^n$,

daher
$$\frac{V(L)}{V(K)} \geqq 1 + c_7 \left(\frac{\varkappa}{\varrho}\right)^n.$$

Zusammenfassend sehen wir, daß für alle L stets

$$\frac{V(L)}{V(K)} \geqq 1 + c \left(\frac{\varkappa}{\varrho}\right)^n \tag{6}$$

also gilt auch
$$\varphi_z \geqq 1 + c \left(\frac{\varkappa}{\varrho}\right)^n \tag{7}$$

Dies ist die Abschätzung, die wir erhalten wollten.

§ 9. Ausfüllung durch Zylinder.

Unter einen Zylinder verstehen wir einen konvexen Körper K mit der Distanzfunktion $f(x) = \mathrm{Max}\,(f_1(x), f_2(x))$, wo $f_1 = (x_1^2 + \ldots + x_m^2)^{\frac{1}{2}}$, $f_2 = \mathrm{Max}\,(|x_{m-1}|, \ldots |x_n|)$, dabei sind die x_i die Koordinaten von x.

Für $m = n$ erhalten wir die Kugel.

Hier lassen sich bedeutend schärfere Abschätzungen[18] erzielen.

Satz 17: Ist K ein Zylinder, so gilt:

$$S(B, K(r)) \leqq 2^{-\frac{m}{2}} \frac{m+2}{2} \left(V(B) + O\left(B, \sqrt{n-m+2}\, r\right)\right) \tag{1}$$

Es sei K ein Zylinder $f \leqq r$. Die Mittelpunkte der Zylinder, die in B eingelagert werden, seien wieder mit p_i bezeichnet. Sie haben die Form $f(x - p_i) \leqq r$. Wir betrachten jetzt weiter die Zylinder $\overline{K}: f_1 \leqq \sqrt{2}\, r$, $f_2 \leqq r$. Dieser Zylinder liegt sicher in einer Kugel vom Radius $\sqrt{n-m+2}\, r = \bar{r}$. Diese Zylinder liegen also alle im Bereich

[18] Der Gedankengang stammt von *Blichfeldt*, Math. Annalen 101.

$B^* = B + {}_r E$ (E = Einheitskugel). Wir definieren nun auf B^* folgende Funktion:

1. Liegt x in l-Zylindern $\overline{K}$, so sei $\psi(x) = \sum_{i=1}^{l} (2r^2 - f_1^2(x - p_i))$,

2. liegt x in keinen solchen Körper, dann sei $\psi(x) = 0$. Es ist nun bekanntlich, vergleiche z. B. *Blichfeldt*[18],

$$\sum_{i=1}^{l} f_1^2(p_i - p_j) \leqq 2l \sum_{i=1}^{l} f_1^2(x - p_i).$$

Die Körper K greifen nach Voraussetzung nicht übereinander, also gilt $f(p_i - p_j) \geqq 2r$. Greifen also zwei Körper $\overline{K}$ übereinander, so muß also $f_1(p_i - p_j) \geqq 2r$ sein, da nach Definition von $\overline{K}$ dann $f_2(p_i - p_j) \leqq 2r$ ist. Daraus folgt also, daß $\sum_{i=1} f_1^2(x - p_i) \geqq 2r^2(l-1)$ ist, wenn der Punkt x in l-Zylindern $\overline{K}$ liegt. Daraus folgt sofort:

$$\psi(x) \leqq 2r^2(l-1)) = 2r^2. \tag{2}$$

Es ist also stets $\psi(x) \leqq 2r^2$.

Daraus folgt (für die Berechnung der auftretenden Integrale sei auf *Blichfeldt*[18] verwiesen):

$$2r^2 V(B^* \geqq \int_{B^*} \psi(x)\,dx = \sum_{i=1}^{\alpha} \int_{\overline{K}_i} (2r^2 - f_1^2(x - p_i))\,dx =$$
$$= a \int_{\overline{K}} (2r^2 - f_1^2(x))\,dx = 2^{\frac{m}{2}+1} \frac{2}{m+2}\, a J r^n$$

also $$S = a J r^n \leqq \frac{m+2}{2} 2^{-\frac{m}{2}} V(B^*) \quad \text{w.z.b.w.}$$

Diese Abschätzung läßt sich noch verschärfen. Schärfere Abschätzungen für die Kugel stammen von *Blichfeldt*[19] und *Rankin*[1]. Letzterer hat auch den Fall betrachtet, wo die eingelagerten Kugel, nicht alle den gleichen Radius haben müssen. Diese Betrachtungen lassen sich auch übertragen auf Körper von der Distanzfunktion $(\Sigma |x_i|^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha}}$ für $\alpha \geqq 1$ (*E. Hlawka*)[19].

---

[19] Sitzungsberichte 1946, 1947. Die Sätze sind dort nur für den gitterförmigen Fall ausgesprochen, gelten aber auch im allgemeinen.

Anmerkung bei der Korrektur: *Mahlev* (Quarterly Journal **17**) hat gezeigt, daß das Problem des Zylinders stets auf das analoge Problem der Basis zurückgeführt werden kann. Vgl. dazu *E. Hlawka*, Anzeiger der math. naturw. Kls. Akademie 1948 S. 116.

Weitere Untersuchungen über Potenzsummen bei *Rankin*. Proc. Amsterdam **51**. Dort auch weitere Literaturangaben.

§ 10. Dichte einer Ausfüllung.

Es soll jetzt gezeigt werden, daß der Limes $\frac{S(B, K(r))}{V(B)}$ existiert und unabhängig vom Bereich B ist. Wir nennen ihn die Dichte. Für Kugeln und B-Würfel wurde dies von *Rankin* gezeigt[1]. Der Gedankengang der Hilfssätze 3 bis 5 ist von der Arbeit von *Rankin* beeinflußt.

Hilfssatz 12: Es sei W ein Würfel von der Kantenlänge w und T ein konvexer Körper mit Mittelpunkt. Es sei $\varrho(T)$ der Umkugelradius und es sei $4\varrho < w$. Dann gilt:

1. Hat T mit W einen Punkt gemeinsam, so liegt er in den zu W konzentrischen Würfel W_1 mit der Kantenlänge $w + 4\varrho$.
2. Liegt T nicht ganz in W, so hat er mit dem Würfel W_2, der konzentrischen zu W ist und die Kantenlänge $w - 4\varrho$ hat, keinen Punkt gemeinsam.

Beweis: T liegt ganz in seiner Umkugel mit dem Radius ϱ, also ganz in einem Würfel W_3 mit demselben Mittelpunkt wie T und der Kantenlänge 2ϱ. Daraus folgt sofort die Behauptung.

Hilfssatz 13: Es sei A eine $K(r)$-Konfiguration von B, $a(A)$ die Anzahl der Punkte von A, $S(B, A, K(r)) = a(A) J r^n$ wie in Definition 12. Weiter sei $\lambda > 0$ eine positive Zahl. Ist $A_1 = \lambda A$, $r_1 = \lambda r$ dann gilt: A_1, ist eine $K(r_1)$-Konfiguration von $B_1 = \lambda B$

$$a(A_1) = a(A),\ S(B_1, A_1, K(r_1)) = \lambda^n S(B, A, K(r)).$$

Hilfssatz 14: Es sei W ein achsenparalleler Würfel von der Kantenlänge w mit Mittelpunkt 0. Weiter seien λ, r_1, r_2 positive Zahlen mit $r_2 \geqq r_1$, $\lambda \geqq 1$. Dann gibt es Zahlen $C_1, C_2 > 0$, so daß, wenn $\varrho_2 \leqq \frac{1}{4} w$ wo ϱ_2 der Umkugelradius von $K_2 : f \leqq r_2$ ist.

$$\left|S(\lambda W, K(r_1)) - S(W, K(r_2))\right| \leqq C(\lambda), C(\lambda) = (C_1(\lambda - \frac{r_1}{r_2}) + C_2 r_1)\ \lambda^{n-1} \tag{1}$$

Dabei ist S in Definition 12 definiert.

Beweis: Es sei $\mu = \lambda \frac{r_2}{r_1}$ und A_2 eine $K(r_2)$-Ausfüllungskonfiguration von $W_2 = \mu W$ und $\Sigma_2 = a(A_2) J r_2^n$. Es sei nun A'_2 die Menge jener Punkte von A_2, die eine $K(r_2)$-Konfiguration von W bilden, $\Sigma' = a(A'_2) J r_2^n$. $S_2 = S(W, K(r_2))$, $A_2'' = A_2 - A'_2$, $\Sigma'' = a(A_2'') J r_2^n$. Dann ist $\Sigma_2 = \Sigma' + \Sigma''$. Nun ist nach Definition 12 $\Sigma' \leqq S_2$. Es soll nun Σ'' abgeschätzt werden.

Wir betrachten die Körper $\overline{K}p : f(x-p) \leqq r_2$, für die p zu A_2'' gehört. Das Gesamtvolumen dieser $\overline{K}\,p$ ist gerade Σ''. Sie liegen alle $W_2 = \mu W$. Da sie nicht ganz in W liegen, so haben sie nach Hilfssatz 12 mit dem Würfel $W' = W\left(1 - \frac{4\varrho_2}{w}\right)$ keinen Punkt gemeinsam.

Es ist also

$$\Sigma'' \leqq V(W_2) - V(W') \leqq (\mu w)^n - (w - 4\varrho_2)^n \leqq n(w\mu)^{n-1}(w(n-1) + 4\varrho_2) \tag{2}$$

Nun ist $\mu = \lambda \frac{r_2}{r_1}$, $\varrho_2 = r_2 \varrho^*$, wo ϱ^* der Umkugelradius von $f \leqq 1$ ist.

Setzen wir $C_1 = n w^n$, $C_2 = 4\varrho \cdot n w^{n-1}$

$$C(\lambda) = \left(C_1\left(\lambda - \frac{r_1}{r_2}\right) + C_2 r_1\right)\lambda^{n-1}$$

so ist also

$$\Sigma'' \leqq \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^n C(\lambda).\ \Sigma \leqq S_2 + \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^n C(\lambda) \tag{3}$$

Dies gilt für jedes A_2, also auch für $S_{2\,2} = S(W_2, K(r_2))$. Setzen wir noch $S_{1\,1} = S(\lambda W, K(r_1))$, so ist nach Definition 12 und Hilfssatz 13, da $\mu = \lambda \frac{r_2}{r_1}$, $S_{2\,2} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^n S_{1\,1}$. Wir erhalten also wegen (3) und $r_1 \leqq r_2$

$$D = S_{1\,1} - S_2 = \left(\frac{r_1}{r_3}\right)^n S_{2\,2} - S_2 \leqq C(\lambda)$$

Weiter ist $S_{2\,2} \geqq S_2$, $S_2 \leqq V(W)$,

also $$D \geqq -\left(1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^n\right) S_2 \geqq -C(\lambda)$$

Damit erhalten wir zusammenfassend: $|D| \leq C(\lambda)$. w.z.b.w.

Hilfssatz 15: Es sei W der Würfel von Hilfssatz 14. Dann gilt für jedes $r > 0$ mit $\varrho(K) < \frac{1}{4} W$ und für jede natürliche Zahl g

$$\left|S(W, K(r g^{-1})) - S(W, K(r))\right| \leqq C_3 r \tag{4}$$

wo C_3 nur von w und f abhängt.

Beweis: Nach Hilfssatz 13 ist $a(W, r g^{-1}) = a(Wg, r)$.

Weiter ist

$$a(Wg, r) \geqq g^n a(W, r), \text{ also } S(W, K(r g^{-1})) \geqq S(W, K(r)).$$

Es sei nun A eine $K(r)$-Konfiguration von $\overline{W} = Wg$. Wir teilen nun $\overline{W}$ in g^n achsenparallele Würfel W_j mit der Kantenlänge W, die also

aus W durch Parallelverschiebung hervorgehen. Mit A_j bezeichnen wir die Punkte von A, die in W_j liegen. Dann ist also $A = \Sigma A_j$. Nach Hilfssatz 12 ist A_j eine $K(r)$-Konfiguration des Würfels $\bar{W}_j$, konzentrisch zu W_j mit der Kantenlänge $w + 4\varrho$. Setzen wir also $W_4 = W(1 + \frac{4\varrho}{w})$, dann ist

$$a(Aj) \leqq a(W_4, K(r)) = \bar{a},$$

also $a(A) \leqq g^n \bar{a}$. Dies gilt für jedes A, daraus folgt $a(\bar{W}, K(r)) \leqq g^n \bar{a}$, also ist nach Hilfssatz 13

$$S(W, K(r g^{-1})) \leqq S_4$$

Weiter ist nach Hilfssatz 14 mit $\lambda = 1 + \frac{4\varrho}{w}$, $r_1 = r_2 = r$,

$$S_4 \leqq S + C'$$

wo $$C' = (1 + \frac{4\varrho}{w})^{n-1} [\frac{4\varrho}{w} C_1 + C_2 r]$$

Nun ist $4\varrho \leqq w$, $\varrho \leqq \varrho^* r$, wo ϱ^* der Umkugelradius vom Eichkörper ist. Setzen wir also

$$C_3 = 2^{n-1} (\frac{4 C_1}{w} + C_2)$$

so folgt die Behauptung.

Hilfssatz 16: Ist W der Würfel von Hilfssatz 14, $S(r) = S(W, K(r))$, dann existiert

$$\Delta = \lim_{r \to 0} \frac{S(r)}{w^n} \tag{5}$$

und ist unabhängig von w.

Beweis: Es seien r_1, r_2 zwei positive Zahlen, die $< \frac{1}{2}$ und $\frac{w}{8\varrho}$. Es ist $\frac{1}{r_3}$, die nächst kleinere ganze Zahl an $\frac{1}{r_1}$, ebenso $\frac{1}{r_4}$ von $\frac{1}{r_2}$. Weiter sei $r_5 = r_3 r_4$, $S_i = S(r_i)$. Dann wollen wir zunächst $S_1 - S_2$ abschätzen. Es ist

$$|S_1 - S_2| \leqq |S_1 - S_3| + |S_3 - S_4| + |S_4 - S_2| \tag{6}$$

Es ist

$$|S_3 - S_4| \leqq |S_5 - S_3| + |S_5 - S_4|$$

Nach Hilfssatz 15 mit $g = r_4^{-1}$ ist $|S_5 - S_i| \leq C_3 r_j$ $(i = 3, 4)$.

Nun ist $\frac{1}{r_3} \geqq \frac{1}{r_1} - 1$, also $r_3 < 2\, r_1$, ebenso $r_4 < 2\, r_2$, also $|S_3 - S_4| < 2\, C_3\, (r_1 + r_2)$. Weiter ist nach Hilfssatz 14 mit $\lambda = 1$ angewendet auf r_1 und r_3

$$|S_1 - S_3| \leqq C_1 \left(1 - \frac{r_1}{r_3}\right) + C_2\, r_1 \leqq (C_1 + C_2)\, r_1 = C_5\, r_1$$

ebenso $|S_2 - S_4| \leqq C_5\, r_2$, also

$$|S_1 - S_2| \leqq (2\, C_3 + C_5)\, (r_1 + r_2) = C_6\, (r_1 + r_2).$$

Es sei nun $\varepsilon > 0$ eine positive Zahl. Dann ist für alle $r_1,\ r_2 < \frac{\varepsilon}{2\, C_6}$ $|S_1 - S_2| < \varepsilon$, d. h. $\lim\limits_{r \to 0} \frac{S\,(r)}{w^n}$ existiert. Es muß noch gezeigt werden, daß er von w nicht abhängt. Es sei W_1 ein achsenparalleler Würfel von der Kantenlänge w_1, der o. B. d. A. zu W konzentrisch angenommen werden kann. Setzen wir $\lambda = \frac{w_1}{w}$, $r_1 = \frac{r}{\lambda}$, so ist nach Hilfssatz 13

$$S\,(W_1, K\,(r)) = \lambda^n\, S\,(W, K\,(r_1)).$$

Aus dem eben bewiesenen erfolgt sofort die Behauptung. Es kann zugelassen werden, daß w_1 von r abhängt, aber muß in r beschränks sein.

Satz 18: Es sei B ein im *Jordan*schen Sinne meßbarer Bereich, mit $0 < V\,(B) < \infty$. $S\,(r) = S\,(B, K\,(r))$ das Maximum der Gesamtinhalte der konvexen Körper mit Mittelpunkt $f\,(x - p) \leqq r$, die, ohne übereinanderzugreifen, in B liegen. Dann existiert

$$\lim_{r \to 0} \frac{S\,(r)}{V\,(B)} = \Delta$$

und ist von B unabhängig.

Beweis: Da B einen Inhalt besitzt, so gibt es bei vorgegebenen $\varepsilon > 0$ eine Menge von achsenparallelen Würfeln W_i mit der Kantenlänge $w = w\,(\varepsilon)$, die nicht übereinandergreifen, so daß

1. der Gesamtinhalt V_1 der W_i, die nicht zu B fremd sind, $\leqq V\,(B) + \varepsilon$ ist,
2. der Gesamtinhalt V_2 der W_i, welche ganz zu B gehören, wir bezeichnen sie mit W_i', $\geqq V\,(B) - \varepsilon$ ist.

Wir setzen $S\,(W_i, K\,(r))$, bzw. $S\,(W_i', K\,(r))$, S_i, bzw. S_i'. Nun ist nach Definition von S: $S \geqq \Sigma\, S_i$.

Nun existiert nach Hilfssatz 16 $\lim_{r \to 0} S_i' = \Delta w''$, also

$$\underline{\lim} \frac{S}{V(B)} \geqq \Delta' \frac{\Sigma' w^n}{V(B)} \geqq \Delta \left(1 - \frac{\varepsilon}{V(B)}\right)$$

Weiter wird B von den W_i mit der Eigenschaft 1 überdeckt. Ist nun A eine $K(r)$-Konfiguration von B, so sei A_i die Menge der Punkte, die in W_i liegen. Dann ist $A = \Sigma A_i$. Dann bilden nach Hilfssatz 12 die A_i eine $K(r)$-Konfiguration von W_i, wo die $\overline{W}_i$ zu W_i konzentrisch sind und die Kantenlänge $\overline{w} = w + 4\varrho$ besitzen. Also

$$a(A_i) \leqq a(\overline{W}_i, K(r)), \; S \leqq \Sigma S(\overline{W}_i)$$

Daraus folgt $\overline{\lim} \frac{S}{V} \leqq \Delta \frac{\Sigma W''}{V} \leqq \Delta \left(1 + \frac{\varepsilon}{V}\right)$

also $\Delta \left(1 - \frac{\varepsilon}{V}\right) \leqq \underline{\lim} \frac{S}{V} \leqq \overline{\lim} \frac{S}{V} \leqq \Delta \left(1 + \frac{\varepsilon}{V}\right)$.

Dies gilt für jedes $\varepsilon > 0$, also existiert $\lim \frac{S}{V}$ und ist gleich Δ w. z. b. w.

Δ heißt Dichte der Ausfüllung durch konvexe Körper mit der Distanzfunktion $f(x)$.

Satz 19: Es ist

$$\frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n} \leqq J \left(\frac{M}{2}\right)^n \leqq \Delta \leqq \frac{1}{\tau} \tag{9}$$

Die Dichte ist stets kleiner als < 1, wenn K kein Polyeder von höchstens 3^{n-1}-Seiten ist. Dabei wurden τ, bzw. M, § 7, Satz 13, bzw. § 2 definiert. J ist Volumen des Eichkörpers $f \leqq 1$.

Beweis: Die Behauptungen folgen sofort aus § 7, Satz 13, § 7 (1), Satz 9, § 6 und Hilfssatz 4, § 2.

Ist K ein Zylinder nach § 9, so gilt für die Dichte nach Satz 17, § 9

$$\Delta \leqq 2^{-\frac{m}{2}} \frac{m+2}{2}$$

Daraus folgt $\lim_{n \to \infty} \Delta = 0$, wenn m mit $n \to \infty$ strebt. Dies gilt insbesondere für die Kugel ($m = n$). Man kann zeigen, daß diese Beziehung auch gilt für alle Körper mit einer Distanzfunktion von der Form $f = (\Sigma |x_i|^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ vgl. § 9 Schluß.

Satz 20: Es sei $\alpha \leqq 1$ eine positive Zahl, $l = \frac{1}{\alpha}$. Es sei $S_a(B, K(r))$

und τ_l wie in Satz 15 definiert. Dann existiert $\Delta_\alpha = \lim_{r\to 0} \frac{S_\alpha}{V(B)}$ ist unabhängig von B und es ist

$$\Delta_\alpha \leqq \frac{1}{\tau_l} \tag{10}$$

Insbesondere ist $\Delta_\alpha < 1$, wenn K kein Polyeder ist. Weiter ist $\lim_{\alpha\to 0} \Delta_\alpha = 1$.

Beweis: Die Existenz von Δ_α zeigt man in analoger Weise wie bei Δ. Für die Kugel vgl. *Rankin*[1]. Die zweite Behauptung entnimmt man § 7, Satz 15. Die letzte Behauptung folgt aus § 12, Satz 25.

Man kann *Rankin*[1], Satz 3 entnehmen, daß für die Kugel $\lim_{n\to\infty} \Delta_\alpha = 0$ ist.

Es soll noch eine weitere Bemerkung angeführt werden.

Ist $S_k(B, K(r))$ das Maximum aller Gesamtvolumina von $k - K(r)$-Ausfüllungen, wie dies in Definition 16 definiert wurde, so kann man zeigen, daß $\Delta_k = \lim_{r\to 0} \frac{S_k}{V(B)}$ existiert. Weiters kann gezeigt werden, analog wie bei Satz 17, daß für eine Kugel $\Delta_k \leqq k \cdot 2^{-\frac{n}{2}} \frac{n+2}{2}$, allgemein für einen Zylinder $\leqq k \cdot 2^{-\frac{m}{2}} \frac{m+2}{2}$ (vgl. *E. Hlawka*[19]). Daraus folgt $\lim_{n\to\infty} \Delta_k = 0$, wenn $k = O(2^{\frac{n}{2}(1-\varepsilon)})$ z. B. $k = n$ ist, d. h. die Dichte Δ_k geht auch dann gegen O, wenn zugelassen wird, daß die eingelagerten Kugeln übereinandergreifen, allerdings dürfen, grob gesprochen, nicht zuviele einen inneren Punkt gemeinsam haben.

§ 11. Ausfüllung durch konvexe Körper ohne Mittelpunkt.

Bis jetzt wurde vorausgesetzt, daß die in einem Bereich B eingelagerten Körper einen Mittelpunkt besitzen. Diese Voraussetzung wird jetzt fallen gelassen. Es sei K ein konvexer Körper $f(x) \leqq r$, der Koordinatenursprung O ein innerer Punkt von K, $f(x)$ seine Distanzfunktion, $H(u)$ $(u^2 = 1)$ seine Stützfunktion.

Definition 20: Es sei $a(B, K(r))$ die größte Anzahl der Körper, die aus K durch Parallelverschiebung hervorgehen, nicht übereinandergreifen und ganz in B liegen, $S(B, K(r))\, J\, r^n$ sein Gesamtvolumen.

Hilfssatz 17: Zwei Körper $K_a : f\ (x - a) \leq r$, $K_b : f\ (x - b) \leq r$ greifen dann und nur dann übereinander, wenn

$$(b - a)\, u < H\,(u) + H\,(-u) \tag{1}$$

ist, für jedes u mit $u^2 = 1$.

Beweis: 1. Angenommen K_a und K_b greifen übereinander. Dann gibt es einen Punkt p, so daß $(p - a)\, u < H\,(u)$, $(p - b)\, u < H\,(u)$.

Daraus folgt sofort die Behauptung.

2. Angenommen, es gelte $(b - a)\, u < H\,(u) + H\,(-u)$ für jedes u, dann müssen wir zeigen, daß K_a und K_b übereinandergreifen. Nehmen wir an, sie greifen nicht übereinander. Dann gibt es eine Ebene ε mit der Richtung u_0, die sie trennt. Dann ist der Abstand $\overline{a\,\varepsilon} = -a\, u_0 > H\,(u_0$, ebenso $\overline{b\,\varepsilon} = b\, u_0 > H\,(u_0)$, also wäre $(b - a)\, u > H\,(u_0) + H\,(-u_0)$ in Widerspruch zur Voraussetzung. Zum Beweis vgl. man *Minkowski*[8].

Wir können Hilfssatz 17 noch etwas anders aussprechen.

Definition 21: (*Bonnesen-Fenchel* 42). Es sei $\hat{K}$ der Konvexe Körper, der aus K durch Zentralsymmetrisierung in bezug auf 0 aus K entsteht. Seine Stützfunktion ist $\frac{1}{2}\,(H\,(u) + H\,(-u))$ und er besitzt O als Mittelpunkt.

Dann folgt sofort:

Hilfssatz 18: Zwei Körper K_a und K_b greifen dann und nur dann übereinander, wenn dies $\hat{K}_a$ und $\hat{K}_b$ tiun.

Satz 21: Es sei ϱ der Umkugelradius von K, β der Inkugelradius von B, $\varrho < \beta$, dann gilt

$$S\,(B_1, \hat{K}) \leqq \frac{V\,(K)}{V\,(\hat{K})}\, S\,(B, K\,(r)) \leqq S\,(B + \hat{K}, \hat{K}) \tag{2}$$

Dabei ist $B_1 = (1 - \frac{\varrho}{\beta})\ B$, wenn der Ursprung, Mittelpunkt einer Inkugel ist.

Beweis: Betrachten wir eine Ausfüllung von B_1 durch Körper, die aus $\hat{K}$ durch Parallelverschiebung hervorgehen. Diese greifen nach Definition nicht übereinander. Jetzt ersetzen wir die eingelagerten Körper $\hat{K}$ durch die zugehörigen Körper K. Nach Hilfssatz 18 greifen diese nicht übereinander. Nach einer Überlegung wie in Hilfssatz 10, § 6 liegen diese alle in B, also $a\,(B_1, \hat{K}) \leqq a\,(B, K)$ nach Definition 12

und 20. Daraus folgt die linke Hälfte der Ungleichung. Jede Ausfüllung von B durch Körper K ist, wenn die eingelagerten Körper durch $\hat{K}$ ersetzt werden, eine Ausfüllung von $B + \hat{K}$ durch Körper $\hat{K}$, also

$$a(B, K) \leqq a(B + \hat{K}, \hat{K})$$

Damit ist alles bewiesen.

Daraus folgt

Satz 22: $\Delta = \lim \dfrac{S(B, K)}{V(B)}$ existiert, ist unabhängig von B und $\Delta = \dfrac{V(K)}{V(\hat{K})} \hat{\Delta}$, wo $\hat{\Delta}$ Dichte von $\hat{K}$

Hilfssatz 19: (*Godbersen*[20], *Bonnesen-Fenchel* 53).

Besitzt K keinen Mittelpunkt, so ist

$$V(K) < V(\hat{K}) \leqq \mu V(K)$$

wo

$$\mu = \frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} {}_n\mathrm{Min}\,(i, n-i)$$

Ist K ein Simplex, so ist $V(\hat{K})\, V^{-1}(K) = \dfrac{1}{2^n} \binom{2n}{n}$

Daraus folgt

Satz 23: Es ist $\Delta < \hat{\Delta} \leqq 1$. Ist K ein Simplex, so ist $\lim_{n \to \infty} \Delta = 0$.

§ 12. Ausfüllung mittels einer Menge $\{K\}$.

Es sei ein konvexer Bereich B mit Inkugelradius β vorgegeben. Weiters sei $\{K\}$ eine unendliche Menge von konvexen Körpern mit Mittelpunkt gegeben. Dabei brauchen die Körper nicht alle voneinander verschieden sein, die Durchmesser sollen aber alle $\frac{1}{2}\beta$ sein und das inf $\varkappa(K)$ über alle Inkugelradien soll > 0 sein. Wir betrachten nun konvexe Körper, die aus der Menge $\{K\}$ durch Translationen hervorgehen, nicht übereinandergreifen und ganz in B liegen.

Wir wollen sagen, es werden Körper aus $\{K\}$ in B eingelagert. Das Gesamtvolumen dieser eingelagerten Körper sei S.

Definition 22: $S(B, \{K\})$ ist das Supremum von S für alle Einlagerungen von $\{K\}$ in B.

---

[20] Dissertation, Göttingen 1938, vgl. Zentralblatt 20, S. 77.

Satz 24: Es ist

$$S = S(B, \{K\}) \geqq C\, V(B) \tag{1}$$

wo $$C = 2^{1-n}\left(1 - \sqrt{\frac{n}{2n+2}}\right)^n \zeta(n) \tag{2}$$

Es können also soviele Körper aus $\{K\}$ in B eingelagert werden, so daß der C-te Teil von B ausgefüllt wird.

Beweis: Die Menge $\{K\}$ ist beschränkt. Nach dem *Blaschke*schen Auswahlsatz (*Bonnesen-Fenchel* 25) gibt es eine Teilfolge $\{K_i\}$, die gegen einen konvexen Körper $\overline{K}$ konvergiert. Ist $1 > \varepsilon > 0$ beliebig, so liegen fast alle Körper K_i im Körper $T = \overline{K} + \frac{1}{8}\,\beta\,\varepsilon\,E$ (E Einheitskugel), und $\overline{K}$ in $K_i + \frac{1}{8}\,\varepsilon\,\beta\,E$. Nun gilt nach § 7 (1), Satz 9, § 6

$$S_1 = S(B, T) \geqq \left(1 - \frac{\varrho_1}{\beta}\right)^n \bar{J}\,(\tfrac{1}{2}\,\bar{M})^n\, V(B) \tag{3}$$

wo ϱ_1 Umkugelradius von T, $\bar{M}$ das absolute Minimum und $\bar{J}$ das Volumen des Eichkörpers von T ist. Nach Hilfssatz 4 ist $\bar{J}\,\bar{M}^n \geqq 2\,\zeta(n)$. Die Anzahl der eingelagerten Körper T bei dieser maximalen Ausfüllung sei a. Weiters ist (*Bonnesen-Fenchel* 44, Seite 78) $\varrho_1 \leqq D(T)\sqrt{\frac{n}{2n+2}}$, wo $D(T)$, $D(K_i)$ die Durchmesser der zugehörigen Körper sind. Weiter ist

$$D(T) < D(K_i + \tfrac{1}{4}\beta\,\varepsilon\,E) < \frac{\beta}{2}(1+\varepsilon)$$

nach Voraussetzung über die Durchmesser von K_i.

Es ist also $$S_1 \geqq C\,(1+\varepsilon)^n\, V(B) \tag{4}$$

Es sei nun jedem eingelagerten Körper T eindeutig ein K_i zugeordnet und wir ersetzen den betreffenden, eingelagerten Körper T durch den Körper, der aus K_i durch jene Translation hervorgeht, welcher den Mittelpunkt von K_i mit dem des zugeordneten, eingelagerten Körper T zur Deckung bringt. Dann sind diese K_i, da sie in T liegen, in B eingelagert. Das Gesamtvolumen deser K_i sei S'. Dann ist

$$S' = S_1 + S' - S_1$$

Nun ist $$|S_1 - S'| = \sum_{i=1}^{a} (V(T) - V(K_i))|$$

Nun liegt T in $K_i + \tfrac{1}{4}\beta\,\varepsilon\,E = \overline{K}_i$,

also $$|S_1 - S'| \leqq \sum_{i=1}^{a} (V(\overline{K}_i) - V(K_i)) \leqq C_1 \cdot \varepsilon,$$

wo C_1 noch von a und ε abhängt. Da $\inf \varkappa(K) > 0$, so ist $D(K) \geqq S > 0$ für alle K aus $\{K\}$. Es liegt also a unter einer Schranke, die von den Ki und von ε nicht abhängt. Also gilt $|S_1 - S'| \leqq C_2 \varepsilon$, wo C_2 unabhängig von a und ε ist.

Daraus folgt

$$S' \geqq S_1 - C_2 \varepsilon$$

also

$$S \geqq S' \geqq (1+\varepsilon)^n C V(B) - C_2 \varepsilon$$

Dies gilt für jedes ε und daraus folgt die Behauptung.

Erweiterungen: 1. In Satz 24 kann die Voraussetzung, daß alle K aus $\{K\}$ einen Mittelpunkt besitzen, fallen gelassen werden, wenn man C durch $\bar{C} = C \mu^{-1}$ ersetzt, wo μ in Hilfssatz 19 definiert ist. Es ist nur nötig, die linke Seite von Satz 21 heranzuziehen.

2. Wir können Satz 24 noch dadurch verallgemeinern, daß wir nur verlangen, daß ein Punkt von B höchstens $2(k-1)+1$ eingelagerten Körpern angehört (k natürliche Zahl). Dann ist C durch $(1 - \sqrt{\frac{n}{2n+2}})^n k 2^{1-n}$ zu ersetzen. Es ist nur nötig, § 6, Satz 11 und § 2, Hilfssatz 6 heranzuziehen.

Satz 25: Es sei ein Bereich B vom *Jordan*schen Inhalt $0 < V(B) < \infty$ gegeben. Weiters sei noch eine Menge $\{K\}$ von konvexen Körpern mit Mittelpunkt gegeben, so beschaffen, daß es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine unendliche Menge $M(\varepsilon)$ aus $\{K\}$ mit Durchmesser ε gibt. Die Körper aus $\{M\}$ brauchen nicht alle voneinander verschieden zu sein. Es sei weiter η eine beliebige, positive Zahl. Dann gibt es $b = [\frac{2V}{C\eta}]$ verschiedene Mengen $M(\varepsilon)$, die so in B eingelagert werden können, ohne daß sie übereinandergreifen, so daß für ihr Gesamtvolumen Σ gilt

$$V(B) - \eta \leqq \Sigma \leqq V(B) \tag{5}$$

Dabei ist C in Satz 24 definiert.

Ist W ein Würfel von der Kantenlänge w, so gibt es nach Voraussetzung eine Menge $M(\frac{1}{4}w)$ aus $\{K\}$ mit dem Durchmesser $\varepsilon = \frac{1}{4}w$. Nach Satz 24 können dann, da $\beta(W) = \frac{1}{2}w$ mindestens soviele Körper aus $M(\frac{1}{4}w)$ eingelagert werden, so daß ihr Gesamtinhalt $\geqq C V(W)$ ist.

Ist B^* eine im *Jordan*schen Sinne meßbare Menge vom Inhalt $V(B^*)$, dann gibt es zu jedem $\delta > 0$ eine Menge achsenparalleler Würfel W_i mit der Kantenlänge $w(B^*, \delta)$, die nicht übereinandergreifen, ganz in B^* liegen und

$$\Sigma V(W_i) \leqq V(B^*) \leqq \Sigma V(W_i) + \delta$$

ist. In jedem W_i werden jetzt Körper aus M $(\frac{1}{2}w)$ eingelagert. Dann gilt für das Gesamtvolumen S (B^*, δ) der eingelagerten Körper aus M $(\frac{1}{4}w)$ nach obigem:

$$V(B^*) \geqq S(B^*, \delta) \geqq C \Sigma V(W_i) \geqq C(V(B^*) - \delta)$$

Die Menge der eingelagerten Körper bezeichnen wir mit L $(B^*. \delta)$, Wir definieren nun $B_0 = B$, $L_0 = L(B_0, \delta)$

allgemein $B_{i+1} = B_i - L_i$, $Li = L(B_i, 2^{-i}\delta)$ $V(L_i) = S(B, 2^{-i}\delta)$. Nach obigem ist

$$V(L_i) \geqq C(V(B_i) - 2^{-i}\delta) \tag{6}$$

Weiters ist

$$V(B_i) \leqq V(B)(1-C)^i + C\delta \sum_{j=0}^{i-1} 2^{-j} \tag{7}$$

wie man durch vollständige Induktion zeigt.

Denn für $i = 1$ ist es richtig, allgemein

$$V(B_{i+1}) = V(B_i) - V(L_i) \leqq V(B_i)(1-C) + 2^{-i}\delta C$$

und daraus folgt sofort (7).

Aus (7) folgt weiter

$$V(B_i) \leqq V(B)(1 + iC)^{-1} + 2C\delta$$

Setzen wir $i = b$, $\delta = \eta(4C)^{-1}$, so folgt $V(B_b) \leqq \eta$. Setzen wir $\sum_{j=i}^{b} L_j = L$, so gilt für $\Sigma = V(L)$ tatsächlich $V(B) - \eta \leqq \Sigma \leqq V(B)$.

Satz 25 kann verallgemeinert werden, wenn man die Erweiterungen von Satz 24 heranzieht.

§ 13. Gitterförmige Überdeckung konvexer Körper durch konvexe mit Mittelpunkt.

Es sei $K: f(x) \leqq r$ wieder ein konvexer Körper mit Mittelpunkt, B ein Bereich vom Inhalt $V(B)$.

Definition 23: Eine Punktmenge U heißt K (r)-Überdeckungskonfiguration von B, wenn jeder Punkt von B in einem Körper $K\,p$: $f(x-p) \leqq r$ liegt, wo $p \varepsilon U$ und jeder Körper K_p mit $p \varepsilon U$, mit B einen inneren Punkt gemeinsam hat. Die Anzahl werde mit u (U) bezeichnet. Eine K (r)-Überdeckungskonfiguration U_0 heißt minimal, wenn $u(U_0) = \min u(U)$ über alle U. Wir setzen $u(U_0) = u(B, K(r))$, $\Sigma(B, K(r)) = u J r^n$.

Definition 24: Ist Γ ein Punktgitter in der Lage z, so heißt eine Punktmenge eine Γ-K (r)-Überdeckungskonfiguration, wenn alle Punkte

von U zu Γ_z gehören und U eine $K(r)$-Überdeckungskonfiguration ist. Die Γ-Konfiguration U_0^* mit $u(U_0^*) = \min u(U)$ über alle Γ_z-Konfigurationen heißt minimale Γ-Überdeckungskonfiguration. Ihre Anzahl bezeichnen wir mit $u^*(B, \Gamma, K(r))$.

Definition 25: $u^*(B, K(r)) = \min u^*(B, \Gamma, K(r))$ über alle Gitter

$$\Gamma, \Sigma^*(B, K(r)) = u^* J r^n$$

u^* nennen wir die Minimalzahl der Körper $K(r)$ die B in gitterförmiger Lagerung überdecken. Σ^* ist das Gesamtvolumen der überdeckenden Körper.

Satz 26: Es sei B konvex, $\beta(B)$, $\varrho(K)$ wie früher definiert, $\varrho < \frac{1}{2n^2}\beta$

Wieder sei O der Mittelpunkt einer Inkugel, $B_1 = (1 - 2n^2 \frac{\varrho}{\beta}) B$.

Dann ist

$$\operatorname{Max}(J \varepsilon^n V(B_1), V(B)) \leqq \Sigma^*(B, K(r)) \leqq J \varepsilon^n (V(B) + O(B, \varrho)) \quad (1)$$

Dabei ist $\varepsilon(f)$ die absolute Exzentrizität nach Definition 2, § 3 $O(B, \varrho)$ die Quermaßsummen nach Definition 7, § 5.

Beweis: Es sei U eine Γ-$K(r)$-Überdeckungskonfiguration. Dann muß nach Definition 1, § 3 $\varepsilon(\Gamma, f) \leqq r$ sein. Wir betrachten nun das Figurengitter $[\Gamma, P^*]$, wo $P^* = P_l \frac{r}{\varepsilon}$ ist. Dabei sei Γ auf seine ausgezeichneten Basisvektoren bezogen und P_l das zugehörige Parallelepiped. $[\Gamma, P^*]$ überdeckt wegen $r \geqq \varepsilon$, den R_n lückenlos, da dies $[\Gamma_l, P]$ tut. P_l liegt ganz im Körper $f(x) \leqq c$, wo $c_1 \leqq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} N_i \leqq \frac{1}{2} n^2 M_n$ (man vgl. § 2) also P^* in $\overline{K}: f(x) \leqq c_2 = c_1 \frac{r}{\varepsilon}$. Nun ist nach Hilfssatz 7, § 3 $\varepsilon \leqq \frac{1}{2} M u$, also $c_2 \leqq n^2 r$.

Wir betrachten nun B_1. Es liegt $B_2 = B_1 + 2P^*$ in $B_3 = B_1 + 2\overline{K}$. Für die Stützfunktion H_3 von B gilt

$$H_3 \leqq H(1 - 2n^2 \frac{\varrho}{\beta}) + 2\overline{H}$$

wo H, $\overline{H}$ die Stützfunktionen von $\frac{3}{4}$, bzw. $\overline{K}$ sind.

Nun ist $\overline{H} \leqq \frac{1}{2} n^2 \varrho$, $H \geqq \beta$ also $H_3 \leqq H$.

Daraus folgt, daß B_2 in B liegt.

Die Parallelotope aus $[\Gamma, P^*]$, deren Mittelpunkte in B liegen, müssen also B_1 überdecken. Daraus folgt

$$u(U)\, D \left(\frac{r}{\varepsilon}\right)^n \geqq V(B_1), \tag{2}$$

wo D das Volumen von P_l ist, also

$$u(U)\, J\, r^n \geqq D^{-1}\, J\, \varepsilon^n\, (\Gamma, f)\, V(B_1) \geqq J\, \varepsilon^n\, (f)\, V(B_1) \tag{3}$$

Dies gilt für jedes Γ, also

$$\Sigma^*(B, K(r)) \geqq J\, \varepsilon^n\, V(B_1). \tag{4}$$

Es soll nun Σ^* nach oben abgeschätzt werden.

Wir wählen ein Gitter Γ mit $\varepsilon(\Gamma, f) \leqq r$.

Dann überdeckt $[\Gamma, K]$ den R_n lückenlos. Nach § 4 (2) kann Γ in eine solche Lage gebracht werden, so daß die Anzahl der Körper, die B treffen $\leqq V(B + K)\, D^{-1}(\Gamma)$ ist. Diese müssen aber B überdecken, also ist

$$u(B, K(r)) \leqq V(B + K)\, D^{-1}(\Gamma)$$

Wir wählen nun für Γ ein minimales Gitter, nach § 3, Satz 1 existiert ein solches, so daß $D(\Gamma) = \left(\frac{r}{\varepsilon}\right)^n$. Daraus folgt

$$\Sigma^* = u^*(B, K(r))\, J\, r^n \leqq V(B + K)\, J\, \varepsilon^n$$

Damit ist alles gezeigt.

Folgerung: $\vartheta^*(f) = \lim\limits_{r \to 0} \dfrac{\Sigma^*}{V(B)}$ existiert und ist $J\, \varepsilon^n\, (f)$.

Definition 25: ϑ^* heißt Dichte der Überdeckung bei gitterförmiger Lagerung.

Nach § 3, Satz 2 ist $\vartheta^* > 1$, wenn K kein $\frac{1}{2}M$-Körper ist, also sicher dann, wenn K kein Polyeder ist. Weiters ist nach denselben Satz $\vartheta^* \leqq n^n$. Wir können nach dem sup ϑ^* über alle konvexen Körper fragen, d. h. welche Körper liefern die dichtstee, minimale Überdeckung. Für $n = 2$ wurde von *Sas*[21] gezeigt, daß für die Kugel ϑ^* den größten Wert annimmt.

14. Dichte einer minimalen Überdeckung.

Es soll gezeigt werden, daß $\vartheta = \lim\limits_{r \to 0} \dfrac{\Sigma(B, K(r))}{V(B)}$ existiert und unabhängig von B ist. Wir nennen sie die Dichte der Überdeckung.

Wie sofort aus Definition 23 folgt, ist analog zu Hilfssatz 13, § 10

$$u(\lambda B, K(\lambda r)) = u(B, K(r)), \Sigma(\lambda B, K(\lambda r)) = \lambda^n \Sigma(B, K(r)) \tag{1}$$

[21] Compositio 6.

für $\lambda > 0$.

Hilfssatz 20: Es sei W der Würfel von Hilfssatz 14. Weiter seien λ, r_1, r_2 positive Zahlen mit $\lambda \leqq 1$, $r_1 \geqq r_2$ und $\varrho^* r_1 \leqq \frac{1}{4} \lambda w$, wo ϱ^* Umkugelradius von $f \leqq 1$ ist.

Dann gilt $$\left| \Sigma(\lambda W, K(r_1)) - \Sigma(W, K(r_2)) \right| \leqq \overline{C}(\lambda)$$

wo $$\overline{C}(\lambda) = n(4\varrho^* r_1 + w)^{n-1} \left((1 - \lambda \frac{r_2}{r_1}) w + 8\varrho^* r_2\right) \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^n$$

Beweis: Wir setzen $\mu = \lambda \frac{r_2}{r_1}$, dann ist $\mu \leqq 1$.

Es sei U eine $K(r_2)$-Überdeckungskonfiguration von W. Es sei U' die Menge der Punkte von U, für welche die zugehörigen K_p ganz in $W_2 = \mu W$ liegen, ihr Gesamtvolumen sei Σ'. Es ist $\Sigma' \leq \Sigma(W_2, K(r_2)) = \Sigma_2$. Die Körper K_p für die p zu $U - U' = U''$ gehört, überdecken $W - W_2$. Das Gesamtvolumen sei Σ''. Die K_p mit $p \varepsilon U''$ liegen nach § 10, Hilfssatz 12, ganz in $W_3 = W(1 + \frac{4\varrho_2}{w})$ und haben mit $W_4 = W_2 (1 - \frac{4\varrho}{\mu n})$ keinen Punkt gemeinsam. Es ist also

$$\Sigma'' \leq V(W_3) - V(W_4) \leqq n(w + 4\varrho_2)^{n-1} ((1-\mu) w + 8\varrho_2) \leqq \overline{C}(\lambda)$$

Daraus folgt, da $\Sigma' + \Sigma'' = \Sigma'''$ das Gesamtvolumen der K_p mit $p \varepsilon U$ ist $\Sigma''' \leqq \Sigma_2 + \overline{G}(\lambda)$. Dies gilt für jedes U, also auch

$$\Sigma_1 = \Sigma(W, K(r_2)) \leqq \Sigma_2 + \overline{C}(\lambda).$$

Setzen wir $\Sigma_3 = \Sigma(\lambda W, K(r_1))$, so folgt

$$\Sigma_3 - \Sigma_1 = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^n \Sigma_2 - \Sigma_1 \geqq \Sigma_2 - \Sigma_1 \geqq -\overline{C}$$

Weiter ist $\Sigma_2 \leqq \Sigma_1 \leqq V(W_3)$, also

$$\Sigma_3 - \Sigma_1 \leqq \left(\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^n - 1\right) \Sigma_1 \leqq \overline{C} \text{ w.z.b.w.}$$

Hilfssatz 21: Für jedes $r > 0$, < 1 mit $\varrho(K(r)) < \frac{1}{4} w$ und für jede natürliche Zahl g ist

$$\left| \Sigma(W, K(r g^{-1})) - \Sigma(W, \overset{\bullet}{K}(r)) \right| \leqq C r \tag{2}$$

wo C nur von W und f abhängt.

Beweis: Es ist $u(W, r g^{-1}) = u(Wg, r)$. Weiter ist $u(Wg, r) \leq g^n u(W_j, r)$, also $\Sigma(W, K(r g^{-1})) \leqq \Sigma(W, K(r))$.

Es sei U eine $K(r)$-Überdeckung von $\overline{W} = Wg$. Wir teilen $\overline{W}$ in g^n achsenparallele Würfel W_j mit der Kantenlänge w. Mit U_j bezeichnen

wir die Punkte von U, die in W_j liegen. Dann ist also U_j eine Überdeckung des Würfels W_j, konzentrisch zu W_j mit der Kantenlänge $w - 4\varrho$. Setzen wir also $W_4 = W\left(1 - \frac{4\varrho}{w}\right)$, dann ist

$$u(U_j) \geqq u(W_4, K(r)) = \bar{u},$$

also $u(U) \geqq g^n \bar{u}$. Dies gilt für jedes U, also $u(\overline{W}, K(r)) \geqq g^n \bar{u}$. Setzen wir $\Sigma_4 = \Sigma(W_4, K(r))$, so ist also

$$\Sigma(W, K(r g^{-1})) \geqq \Sigma_4$$

Weiter ist nach Hilfssatz 20, mit $\lambda = 1 - \frac{4\varrho}{w}$, $r_1 = r_2 = r$, da $r < 1$

$$\Sigma_4 \geqq \Sigma - C r$$

wo $C = 12\, n\, \varrho^* (w + 4\varrho^*)^{n-1}$ w.z.b.w.

Hilfssatz 22: Ist $\Sigma(r) = \Sigma(W, K(r))$, so existiert

$$\vartheta = \lim_{r \to 0} \frac{\Sigma(r)}{w^n} \tag{3}$$

und ist unabhängig von w.

Der Beweis ist analog zum Beweis des Hilfssatzes 16, § 10, wenn man Hilfssatz 20 und 21 heranzieht.

Satz 27: Es sei B ein im *Jordan*schen Sinne meßbarer Bereich mit $0 < V(B) < \infty$, $\Sigma = \Sigma(B, K(r))$ das Minimum der Gesamtinhalte der konvexen Körper mit Mittelpunkt $f(x - p) \leqq r$, die B überdecken, dann existiert

$$\vartheta = \lim_{r \to 0} \frac{\Sigma}{V}$$

und ist von B unabhängig. ϑ heißt Dichte der Überdeckung durch konvexe Körper mit der Distanzfunktion f.

Der Beweis erfolgt analog eu Satz 18. Es ist nur der Unterschied, daß man statt den A_i, die U_i zu nehmen hat, wo die U_i die Menge der Punkte einer Überdeckung U sind, welche in den W_i liegen. Diese bilden dann nach Hilfssatz 12 eine Überdeckung der W_i' mit der Kantenlänge $w - 4\varrho$, welche konzentrisch zu W_i liegen.

Man zeigt analog

Satz 28: Es sei B ein Bereich wie in Satz 27. Es sei $\Sigma_\alpha = \Sigma_\alpha(B, K(r))$ das Infimum der Gesamtinhalte der konvexen Körper mit Mittelpunkt $f(x - p) \leqq \bar{r}$, $\alpha r \leqq \bar{r} \leqq r$, $(\alpha > 0)$ die B überdecken, dann existiert

$$\lim_{r\to 0} \frac{\Sigma_\alpha}{V(B)} = \vartheta_\alpha \tag{4}$$

und ist von B unabhängig. ϑ_α heißt wieder Dichte der Überdeckung.

Es sei noch bemerkt, daß man in Satz 27, die Voraussetzung, daß die Körper einen Mittelpunkt besitzen, fallen lassen kann.

§ 15. Überdeckung konvexer Körper durch konvexe mit Mittelpunkt.

Es soll jetzt $\Sigma(B, K(r))$ von Satz 27, bzw. gleich allgemein $\Sigma_\alpha = \Sigma_\alpha(B, K(r))$ von Satz 28 für konvexe Körper B nach unten abgeschätzt werden.

Die Abschätzung nach oben haben wir nach Definition 23 und 25

$$\Sigma \leqq \Sigma^*. \tag{1}$$

Satz 29: Es sei B ein konvexer Körper mit $V(B) > 0$. Es sei der Ursprung 0 Mittelpunkt einer Inkugel von B mit Radius β, ϱ der Umkugelradius von K, $\varrho < \beta$, $B_1 = (1 - \frac{\varrho}{\beta})\, B$, $V_1 = V(B_1)$ $0 < \lambda < 1$ beliebig, dann ist

$$\Sigma_\alpha(B, K(r)) \geqq \operatorname{Max}(V, V_1(1 + C)) \tag{2}$$

$$C = \frac{\alpha^n}{4} \operatorname{Min}\left(\frac{2^{1-e}}{(2n)^n}\left(1 - \frac{S_1}{V_1}\right)^{n+e}, \left(\frac{1}{\lambda} - 1\right)^n \left(1 - \frac{S_1}{V_1}\right)\right) \quad e = 1,$$

wenn n gerade, 0 sonst,

$$S_1 = S_{\lambda\alpha}(B, K(r)).$$

Dabei ist $S_{\lambda\alpha}$ in Satz 15 definiert (§ 7).

Weiter ist

$$\vartheta_\alpha \geqq 1 + \tfrac{1}{4}\left(\frac{\alpha}{2n}\right)^n C_1 \tag{3}$$

wo

$$C_1 = \left(\frac{1}{\lambda} - 1\right)^n (1 - \Delta_{\alpha\lambda})^{n+1}, \quad (\tfrac{1}{2} \leqq \lambda < 1).$$

Beweis: Die Körper K_p der Überdeckung von B, die B_1 überdecken, liegen ganz in B. Dies zeigt man genau so, wie in Hilfssatz 10. Es werden jetzt in folgendem nur diese Körper $K_i : f(x - p_i) \leqq r_i$ mit $\alpha r \leqq r_i \leqq r$ in Betracht gezogen, die B_1 überdecken. Es sei v die Anzahl dieser Körper $\Sigma_1 = \sum^{v} J r_i^n$. Dann ist $\Sigma_\alpha \geqq \Sigma_1$.

Wir bilden nun

$$\operatorname*{Min}_{j \neq i} (r_i + r_j)^{-1} f(p_i - p_j) = \lambda_i, \hat{r}_i = \lambda_i r_i \tag{4}$$

also $$f(p_i - p_j) \geqq \lambda_i (r_i + r_j) \quad (i \neq j)$$

Es wird in Hilfssatz 23 gezeigt werden, daß $\lambda_j \leqq 1$ also $\hat{r}_i \leqq r_i$.

Es sei $\overline{K}_i$ jener Körper, für welchen

$$f(p_i - \bar{p}_i) = \lambda_i (r_i + \bar{r}_i), q_i = (r_i + \bar{r}_i)^{-1} (p_i \bar{r}_i + \bar{p}_i r_i) \tag{5}$$

Dann definieren wir auf K_i eine Funktion $\Phi_i(x)$ so:

$$\Phi_i(x) = \tfrac{1}{2}, \text{ wenn } f(x - q_i) \leqq \alpha (r_i - \hat{r}_i) \tag{6}$$

$$1, \text{ sonst in } K_i$$

Wir definieren weiter

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^{\nu} \Phi_i(x) \tag{7}$$

Dann ist in $B: \Phi(x) \geqq 1$. Denn jedes $x \varepsilon B_1$ liegt in einem K_i. Liegt es sogar in $f(x - q_i) \leqq \alpha (r_i - \hat{r}_i)$, dann liegt es auch in $\overline{K}_i$, denn

$$f(x - \bar{p}_i) \leqq f(x - q_i) + f(q_i - \bar{p}_i) \leqq \alpha r_i (1 - \lambda_i) + \lambda_i \bar{r}_i \leqq \bar{r}_i \tag{8}$$

Es ist also

$$J \sum_{i=1}^{\nu} [r_i^n - \frac{\alpha^n}{2} (r_i - \hat{r}_i)^n] = \int_{B1} \Phi(x)\, d\, x \geqq V(B_1) = V_1 \tag{9}$$

Es seien die K_i $(i \leqq m)$ jene Körper, für die $\lambda_i \leqq \lambda$, also $\hat{r}_i \leqq \lambda r_i$. Für die K_i mit $m > i$ ist dann $\lambda_i > \lambda$.

Aus (9) folgt

$$\Sigma_1 \geqq V_1 + \tfrac{1}{2} \alpha^n J \sum_{i=1}^{\nu} (r_i - \hat{r}_i)^n$$

Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

1. $$\Sigma_2 = J \sum_{i=1}^{m} \hat{r}_i^{\,n} \geqq k\, V_1, \; k = \tfrac{1}{2} (1 - \frac{S_1}{V_1}) \tag{10}$$

Dann ist

$$\Sigma_1 \geqq V_1 + \sum_{i=1}^{m} (r_i - \hat{r}_i)^n \geqq V_1 [1 + \tfrac{1}{2} \alpha^n (\frac{1}{\lambda} - 1)^n k] \geqq V_1 (1 + C) \tag{11}$$

2. $$\Sigma_2 < k\, V_1. \tag{12}$$

Es ist $$(\sum_{i}^{\nu} (r_i^n - \hat{r}_i^n))^n \leqq n^n (\Sigma r_i^n)^{n-1} (\Sigma (r_i - \hat{r}_i)^n),$$

also folgt aus (9)

$$\Sigma_1 \geq V_1 + \frac{\alpha^n}{2n^n \alpha^n} \Sigma_1^{1-n} (\Sigma_1 - \Sigma_3)^n \geqq V_1 [1 + \tfrac{1}{2} (\frac{\alpha}{n})^n (1 - \Sigma_3 V_1^{-1})^{n+e}] \tag{13}$$

Dabei ist $\Sigma_3 = \overset{\nu}{\Sigma} J \hat{r}_i^n = \Sigma_2 + \Sigma_4$, wo $\Sigma_4 = \overset{\nu}{\underset{m+1}{\Sigma}} J \hat{r}_i^n$. Für die K_i, die zu Σ_4 beitragen, gilt nun folgendes: Wir betrachten die Körper $\hat{K}_i : f(x - p_i) \leqq \hat{r}_i$. Diese greifen nicht übereinander, da $f(p_i - p_j) \geqq \lambda_i (r_i + r_j) \geqq \hat{r}_i + \hat{r}_j$ und liegen ganz in B, da dies die K_i tun.

Weiter ist

$$\alpha \lambda r \leqq \hat{r}_i = \lambda_i r_i \leqq r. \tag{14}$$

Also ist nach Definition $\Sigma_4 \leqq S_{\lambda\alpha}(B, K) = S_1$, daher $\Sigma_3 < k V_1 + S_1 = \tfrac{1}{2}(V_1 + S_1)$ und daraus folgt wieder $\Sigma_1 \geqq V_1 (1 + C)$ w.z.b.w.

Hilfssatz 23: Es ist $\lambda_i \leqq 1$.

Beweis: Der Körper $K_i' : f(x - p_i) \leqq r_i (1 + \varepsilon)$, wo $\varepsilon > 0$ genügend klein, hat mit B_1 sicher einen Punkt x gemeinsam, da dies K_1 tut. Es gibt nun in B_1 einen Punkt y, der im Innern liegt und nicht zu K_i' gehört, denn sonst wäre

$$\chi_n (\varrho (1+\varepsilon))^n \geqq J (r (1+\varepsilon))^n \geqq (1 - \frac{\varrho}{\beta})^n V(B) \geqq \chi_n (1 - \frac{\varrho}{\beta})^n \beta^n,$$

was für genügend kleines ε auf einen Widerspruch führt. Die Verbindungsstrecke x, y wird den Rand von K_i' in einen Punkt $\bar{x}$ treffen, der ebenfalls in B_1 liegt. Es ist also $f(\bar{x} - p_i) = r_i (1 + \varepsilon)$. Es liegt aber nicht in K_i. Da aber B_1 von den K_j überdeckt wird, so muß es ein j geben, so daß $f(\bar{x} - p_j) \leqq r_j$. Daraus folgt $f(p_i - p_j) \leqq r_i (1 + \varepsilon) + r_j$, daher $\lambda_i \leqq (r_i + r_j)^{-1} f(p_i - p_j) \leqq 1 + \varepsilon$. Dies gilt für jedes $\varepsilon > 0$, also $\lambda_i \leqq 1$. w.z.b.w.

Es sei $l = \alpha^{-1}$. $L = (2l^2 + 1)^n$, $\nu = L - [L]$ und τ_l sei wie in Satz 15 definiert. Dann gilt

Satz 30: Es ist

$$\vartheta_\alpha \geqq 1 + \tfrac{1}{2} (\frac{\alpha}{2n} (\frac{1}{\lambda} - 1) (1 - \frac{1}{\tau_l}))^n \tag{15}$$

für jedes $\lambda > 1 - \frac{1}{4n^2 L} (1 - \nu)$. Es ist also $\vartheta_\alpha > 1$, wenn K kein Polyeder ist. Weiter ist $\lim_{\alpha \to 0} \vartheta_\alpha = 1$.

Beweis: Wir haben nach Satz 29 nur $\Delta_{\lambda\alpha}$ abzuschätzen. Es ist nach § 10, Satz 20, $\Delta_{\lambda\alpha} \leqq \tau_r^{-1}$, wo $r = l\,\alpha^{-1}$.

Nun ist nach Satz 15, § 7

$$\tau_r = \text{Min}\,(\omega\,(f,\,\delta_r),\,\varphi_s\,(f))$$

Dabei ist $s^n = [(2\,r+1)^n]$. Man rechnet leicht nach[15], daß $[L] \leqq s^n < [L]+1$, also $s = h$, wenn $h^n = [L]$, daher ist $\tau_r = \tau_l$, da $\delta_s < \delta_l$ ein passendes δ_l ist. Die letzte Behauptung wird sich aus § 16, Satz 32, ergeben.

Benützt man *Rankin*[1], Satz 3, so kann man für Kugeln ein etwas besseres Resultat erzielen. Man kann die Abschätzungen von ϑ verbessern, wenn man Polyeder heranzieht, die K eingeschrieben sind. Doch soll darauf nicht weiter eingegangen werden. Wir haben bis jetzt vorausgesetzt, daß K einen Mittelpunkt besitzt. Wir wollen diese Voraussetzung jetzt fallen lassen. Es sei $\hat{K}$, der nach Definition 21 K zugeordnete Körper. Dabei sei o der Schwerpunkt von K. Dann gilt, wenn V_1 wie im Satz 29 definiert ist:

Satz 29′:

$$\Sigma\,(B,\,K\,(r)) \geqq \text{Max}\,(V,\,V_1\,(1+C)) \tag{16}$$

wo

$$C = \tfrac{1}{4}\,\beta^n\,q\,\text{Min}\left(\frac{2^{1-e}}{(2\,n)^n}\left(1-\frac{S_1}{2\,V_1}\right)^{n+e},\ \left(\frac{1}{\lambda}-1\right)^n\left(1-\frac{S_1}{2\,V_1}\right)\right)$$

$$q = \frac{V\,(\hat{K})}{V\,(K)},\ \beta = \frac{2}{n+1}\,S_1 = S_\lambda\,(B,\,K\,(r)),\quad 0 < \lambda < 1.$$

Weiter ist

$$\vartheta \geqq 1 + \tfrac{1}{4}\,(\frac{\beta}{2\,n})^n\,C_1 \tag{17}$$

wo

$$C_1 = (\frac{1}{\lambda}-1)^n\,(1-\frac{\Delta\,\lambda}{g})^{n+1}\quad(\lambda \geqq \tfrac{1}{2})$$

Daraus folgt, da nach Hilfssatz 19, $q > 1$ ist, wenn K keinen Mittelpunkt besitzt: Es ist stets $\vartheta > 1$, wenn K keinen Mittelpunkt besitzt. Der Beweis verläuft weitgehend analog zu Satz 29. Die Körper K_p $(x-p)\,u \leqq H\,(u)$ der Überdeckung von B, die B_1 überdecken, liegen in B. Es sollen wieder nur solche in Betracht gezogen werden, $K_i\colon (x-p_i)\,u \leqq H\,(u)\ (i = 1,\,\ldots\,v)$, $\Sigma_1 = \overset{v}{\Sigma}\,V\,(K)$. Dann ist $\Sigma \geqq \Sigma_1$.

Es habe $\hat{K}: x\,u \leqq \frac{1}{2}(H(u) + H(-u))$ die Distanzfunktion $f(x)$, also $\hat{K}: f(x) \leqq r$.

Dann bildet man

$$\operatorname*{Min}_{j \neq i} \frac{1}{2r} f(p_i - p_j) = \lambda_i, \hat{r_i} = \lambda_i r \tag{18}$$

Dann ist wieder analog zu Hilfssatz 23 $\lambda_i \leqq 1$, denn $K_i' : (x - p_i)\,u \leqq H(u)\,(1+\varepsilon)$ hat mit B_1 sicher einen Punkt gemeinsam. Dann gibt es wieder ein $\bar{x}$ und ein p_i, so daß

$$(\bar{x} - p_i)\,u \leqq H(u)\,(1+\varepsilon),\ (\bar{x} - p_j)\,u \leqq H(u),$$

also $(p_j - p_i)\,u \leqq H(u)\,(1+\varepsilon) + H(-u)$, $f(p_i - p_j) \leqq 2r + \varepsilon_1$, also $\lambda_i \leqq 1$. Es sei nun $\overline{K}_i$ jener Körper, für welchen $f(p_i - \bar{p}_i) = 2r\,\lambda_i$, daher $(p_i - \bar{p}_i)\,u \leqq \lambda_i\,(H(u) + H(-u))$. Dann gibt es einen Punkt q_i, so daß

$$(q_i - p_i)\,u \leqq \lambda_i H(u),\ (q_i - \bar{p}_i)\,u \leqq \lambda_i H(u)$$

wie man sich analog zu Hilfssatz 17 überlegt.

Der Körper $f(x - q_i) < \beta(r - \hat{r_i})$, d. h. $(x - q_i)\,u < \frac{1}{n+1}$ $(H(u) + H(u))\,(1 - \lambda_i)$ liegt sowohl in K_i wie in $\overline{K}_i$, denn es ist zum Beispiel, für alle diese x $(x - p_i)\,u = (x - q_i)\,u + (q_i - p_i)\,u \leqq H(u)$, denn nach *Bonnesen-Frenchel* 34, S. 53 ist $H(-u) \leqq n\,H(u)$.

Nun definieren wir wieder auf K_i, $\Phi_i(x)$ mit

$$\Phi_i(x) = \begin{matrix} \frac{1}{2} & f(x - q_i) \leqq \beta(r - \hat{r_i}) \\ 1 & \text{sonst in } K_i \end{matrix}$$

und $\Phi(x) = \Sigma\,\Phi_i(x)$. Dann ist $\Phi(x) \geqq 1$ in B_1, und

$$\sum_i [V(K) - \tfrac{1}{2}\beta^n J(r - \hat{r_i})^n] \geqq V_1$$

wo J das Volumen von $f \leqq 1$. Es ist daher

$$\Sigma_1 \geqq V_1 + \tfrac{1}{2}\beta^n \Sigma J (r - \hat{r_i})^n.$$

Jetzt geht der Beweis wie bei Satz 29 zu Ende. Es ist nur zu beachten, daß jetzt $\Sigma J r^n = q\,\Sigma$ und für k $\frac{1}{2}(q - \frac{S_1}{V_1})$ zu nehmen ist.

§ 16. Überdeckungen durch eine Menge $\{K\}$.

Es sei wie in § 12 $\{K\}$ eine Menge von konvexen Körpern und B ein konvexer Bereich. Es mögen dieselben Bezeichnungen und Voraussetzungen wie dort gelten. Dann sei Σ der Gesamtinhalt der Körper,

die aus Körpern von $\{K\}$ durch Translation hervorgehen und B überdecken. Weiter sei $\Sigma(B, \{K\}) =$ Inf. aller dieser Σ. Dann gilt[22]

Satz 31: $$\Sigma(B, \{K\}) \leqq n^n (V(B) + O(B, \beta \sqrt{\tfrac{n}{2n+2}})) \qquad (1)$$

Dabei ist $O(B, t)$ die Quermaßsumme nach Definition 7. Der Beweis ist analog wie bei Satz 24. Es ist nur zu beachten, daß nach § 15 (1), Satz 26, für einen Körper

$$\Sigma(B, K) \leqq J \varepsilon^n (V(B) + O(B, \varrho)) \qquad (2)$$

und nach Satz 2, § 3, $J \varepsilon^n \leqq n^n$ ist

Erweiterungen: 1. Setzt man nicht voraus, daß alle Körper aus $\{K\}$ einen Mittelpunkt besitzen, so ist in Satz 31, der Ausdruck rechts mit $\frac{1}{2}(n+1)$ zu multiplizieren.

Dies folgt aus folgenden

Hilfssatz (*Bonnesen-Fenchel* 34, Seite 53):

Es sei K ein konvexer Körper und sein Schwerpunkt liege in O. Dann enthält er den Körper $\frac{2}{n+1} \hat{K}$, wo $\hat{K}$ der Körper aus Definition 21 ist.

2. Verlangt man, daß B mindestens l^n-fach bedeckt wird ($l \geqq 1$), so hat man noch mit l^n zu multiplizieren. Man geht bei der Abschätzung wie in Hilfssatz 7 und 8 bei ε vor (§ 3).

Satz 32: Es sei B im *Jordan*schen Sinne meßbar mit $V(B) > O$. Weiters sei $\{K\}$ eine Menge von konvexen Körpern, welche die Voraussetzungen von Satz 25 erfüllen. Dann gibt es eine Konstante C_n, die nur von n abhängt mit folgender Eigenschaft:

Ist $\eta_1 > 0$ eine beliebige Zahl, $\eta = \frac{1}{2} \eta_1 C_n^{-1}$, so gibt es $b+1$ Mengen M_ε, welche B so überdecken, daß ihr Gesamtinhalt

$$\Sigma_1 \leqq V(B) + \eta_1 \qquad (3)$$

Dabei hat b dieselbe Bedeutung wie in Satz 25 (§ 12).

Beweis: Nach Satz 25 können b-Mengen M_ε so in B eingelagert werden, daß sie nicht übereinandergreifen und für das Volumen Σ dieser Menge L gilt

$$V(B) - \eta \leqq T \leqq V(B)$$

also $V(B - L) \leqq \eta$

---

[22] Für $n = 2$ wurde für kleine r ein ähnlicher Satz von *Fejes* aufgestellt, vgl. die erste Arbeit in

Nun ist $B - L$ meßbar, kann also bei einem $\delta > 0$ so durch eine Menge von achsenparallelen Würfeln von einer Kantenlänge w überdeckt werden, daß

$$\Sigma V(W_i) \leqq V(B - L) + \delta$$

Nach Satz 31 kann jedes W_i durch Körper aus einer Menge M_ε so überdeckt werden, so daß

$$\Sigma(W_i, M_\varepsilon) \leqq n^n (V(W_i) + O(W_i, \beta \sqrt{\tfrac{n}{2n+2}})) = C_n . w^n \qquad (4)$$

Es wird daher $B - L$, so durch Körper aus M_ε überdeckt, daß

$$\Sigma_2 = \Sigma(B - L, M_\varepsilon) \leqq C_n \Sigma V(W_i) \leqq C_n (\eta + \delta) = \eta_1,$$

wenn $\delta = \eta$ genommen wird. Die Menge $L + M_\varepsilon = L_1$ überdeckt B und es gilt für $\Sigma_1 = V(L_1)$

$$\Sigma_1 = \Sigma + \Sigma_2 \leqq V(B) + \eta_1 \text{ w.z.b.w.}$$

Es soll noch folgende Ergänzung zu Satz 29 bewiesen werden:

Es ist stets

$$\vartheta_\alpha \leqq \Delta_\alpha + C_n (1 - \Delta_\alpha) \qquad (5)$$

Beweis: Es liege eine Ausfüllung von B durch Körper $f(x - p) \leqq r'$ $\alpha r \leqq r' \leqq r$ $(\alpha \leqq 1)$ vor. Es sei L die Menge von B, die dabei überdeckt wird. $B - L$ kann nun durch Körper $f(x - p) \leqq r$ so überdeckt werden, daß das Gesamtvolumen $\Sigma(B - L)$ dieser Körper $\leqq C_n V(B\text{-}L)$ ist. Dies zeigt man wie in Satz 32. Damit ist B überdeckt und da $V(B - L) = V(B) - V(L)$, so ist

$$\Sigma_\alpha(B, K) \leqq V(L) + C_n (V(B) - V(L))$$

also auch

$$\vartheta_\alpha \leqq \Delta_\alpha + C_n (1 - \Delta_\alpha) \text{ w.z.b.w.}$$

Daraus folgt jetzt:

Ist ein konvexer Körper K mit Mittelpunkt so beschaffen, daß $\Delta_\alpha = 1$ ist, dann ist auch $\vartheta_\alpha = 1$ und umgekehrt.

Beweis: Ist $\Delta_\alpha = 1$, so folgt sofort aus (5), daß $\vartheta_\alpha \leqq 1$ also $\vartheta_\alpha = 1$. Es sei nun $\vartheta_\alpha = 1$. Dann folgt aus Satz 29, daß $\Delta_{\alpha\lambda} = 1$ für $\frac{1}{2} \leqq \lambda < 1$. Aber es ist $\Delta_{\alpha\lambda} \leqq \lambda^{-n} \Delta_\alpha$.

Dies sieht man so ein: Es liege eine Ausfüllung von B durch Körper $K_i : f(x - p_i) \leqq r_i$ und $\lambda \alpha r \leqq r_i \leqq r$ vor. Jeder der Körper K_i für die $\lambda r \leqq r_i \leqq r$ ist, ersetze man durch $K_i' : f(x - p_i) \leqq \lambda r$, die anderen bleiben ungeändert. Dies stellt wieder eine Ausfüllung von B dar, mit $\lambda \alpha r \leqq \bar{r}_i \leqq \lambda r$.

Das Gesamtvolumen der eingelagerten Körper der ursprünglichen Ausfüllung Σ können wir so schreiben: $\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2$, wo $\Sigma_1 = \sum_{i=1}^{t} J\, r_i^n$ mit $\lambda r \leqq r_i \leqq r$. Es ist nun $\Sigma_1 \leqq \lambda^{-n} \sum_{i=1}^{t} J\, (\lambda r)^n$, daher

$$S_{\lambda\alpha}(B, K(r)) \leqq \lambda^{-n} S_\alpha (B, K(\lambda r)), \text{ also } \Delta_{\alpha\lambda} \leqq \lambda^{-n} \Delta_\alpha.$$

Da nun $\Delta_{\alpha\lambda} = 1$, so folgt $\Delta_\alpha \geqq \lambda^n$ für jedes $\lambda \geqq \frac{1}{2}$, daher $\Delta_\alpha \geqq 1$, d. h. $\Delta_\alpha = 1$.

§ 17. Zwei Sätze über Konfigurationen.

Es sollen einfache Eigenschaften bei Ausfüllungen und Überdeckungen bewiesen werden.

Es liege eine maximale Ausfüllung eines konvexen Körpers B durch Körper K vor, mit $\varrho < \frac{1}{3}\beta$. Dabei seien ϱ und β wie vorher definiert. Es sei $K: f(x-p) \leqq r$ irgendein Körper dieser Ausfüllung von B, der mit $B_3 = (1 - \frac{3\varrho}{\beta})\, B$ Punkte gemeinsam hat. Dann liegt K_3: $f(x-p) \leqq 3r$ ganz in B. Dann gilt

Satz 33:

Die Menge der Mittelpunkte p_i aller Körper K_i der Ausfüllung, die mit K_3 innere Punkte gemeinsam haben, liegt in keiner Ebene (R^{n-1}).

Beweis: Angenommen der Satz wäre falsch. Dann liegen die p_i in einer Ebene durch p. Wir betrachten den Streifen ε der beiden Stützebenen an K, welche parallel zur Ebene sind. Dann liegen alle diese K_i in ε. Es gibt nun sicher Punkte von $f(x-p) = 2r$, welche nicht in ε liegen. Es sei $\bar{p}$ ein solcher. Dann hat $K': f(x-\bar{p}) \leqq r$ mit ε keinen inneren Punkt gemeinsam, da sonst $f(p-\bar{p}) < 2r$ wäre. Weiters liegt K' in K_3, da für jedes x in K': $f(x-p) \leqq f(x-\bar{p}) + f(p-\bar{p}) \leqq 3r$ K' hat aber mit keinem Körper $\bar{K}$ der Ausfüllung innere Punkte gemeinsam, denn sonst wäre $\bar{K}$ ein K_i, was nicht geht. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme, daß die Ausfüllung maximal ist.

Es liege nun eine Überdeckung von B durch Körper K vor. Es sei $B_2 = (1 - \frac{2\varrho}{\beta})\, B$. Es sei $K: f(x-p) \leqq r$ ein Körper der Überdeckung, der mit B_2 Punkte gemeinsam hat ($\varrho < \frac{1}{2}\beta$).

Dann gilt

Satz 34: Die Menge der Mittelpunkte p_i der K_i der Überdeckung, die mit K Punkte gemeinsam haben, liegen in keiner Ebene.

Beweis: Es genügt zu zeigen, daß dies richtig ist für die p_i, deren K_i mit $\overline{K} : f(x-p) < r(1+\varepsilon)$, $(\varrho > 0)$ Punkte gemeinsam haben, nicht in einer Ebene liegen.

Angenommen, dies wäre falsch. Die p_i würden also in einer Ebene durch p liegen. Dann betrachten wir den Streifen ε, gebildet wie im Beweis von Satz 33. Die K_i würden wieder alle im Streifen liegen. Nun gibt es sicher innere Punkte von $\overline{K}$, die nicht in ε liegen. Nun liegt $\overline{K}$ in B, daher gäbe es Punkte von B, die nicht überdeckt werden. Das ist ein Widerspruch.

§ 18. Weitere Sätze über Überdeckungen.

Es sei B ein im *Jordan*schen Sinne meßbarer Bereich mit $V(B) = V$. Er werde überdeckt von konvexen Körpern, die aus einem konvexen Körper $K : F(x) \leqq 1$ mit der Stützfunktion $H(u)$ durch Parallelverschiebung hervorgehen. Es sei $\hat{K}$ der Körper von Definition 21. Dabei ist vorausgesetzt, daß o in K liegt. Es sei $\hat{K} : f(x) \leqq r$ und J das Volumen des Eichkörpers $f(x) \leqq 1$.

Satz 35: Ist $M(f)$ das absolute Minimum, dann gibt es in der Überdeckung von B soviele Körper, die nicht übereinandergreifen, so daß ihr Gesamtinhalt

$$S \geqq \operatorname{Max}\left(\frac{1}{4^n} J M^n \frac{V(K)}{V(\hat{K})}, \frac{V(K)}{V(K+2\hat{K})} V(B)\right) \tag{1}$$

ist.

Für K-Würfel wurde dies von *Sokolin*[23] gezeigt.

Beweis: Es sei $\overline{\Gamma}$ das maximale Gitter mit $D(\overline{\Gamma}) = (4 r M^{-1})^n$ (vgl. zur Definition § 2). Es ist also $M_1(\overline{\Gamma}, f) = 4r$. Dann kann man nach § 4 (1) $\overline{\Gamma}$ in eine solche Lage z bringen, so daß B mindestens $V \cdot D^{-1}$ Gitterpunkte enthält. Jeder dieser Gitterpunkte p muß in einen K_α : $(p-a)\, u \leqq H(u)$ liegen. Kein K kann zwei dieser Gitterpunkte enthalten, sonst wäre $(p'-p'')\, u \leqq H(u) + H(-u)$, d. h. $f(p'-p'') \leqq 2r$, was nicht geht. Also liegt jeder Gitterpunkt nur in einem solchen K_a. Diese K_α können nicht übereinandergreifen, denn dann wäre

[23] C. R. Acad. ScURSS BNr. 20 (1940).

$(b-a)\,u < H(u) + H(-u)$ also $(p_a - p_b)\,u < 2\,(H(u) + H(-u))$ also $f(p_a - p_b) < 4\,r$, was nicht geht.

Es ist daher

$$S \geqq V.D^{-1}\,V(K) = \tfrac{1}{4}\,J\,M^n\,\frac{V(K)}{V(\hat{K})}\,V(B) \tag{2}$$

Der weitere Teil der Behauptung ist enthalten in den allgemeineren

Satz 36: Es sei B überdeckt von den Körpern $K_j : F(x - p_j) \leqq t_j$. Dann gilt für das Supremum $\bar{S}$ der Gesamtvolumina der K_i, die nicht übereinandergreifen

$$\bar{S} \geqq C\,V(B),\ C = \frac{V(K)}{V(K + 2\hat{K})} \tag{3}$$

Besitzt K einen Mittelpunkt, so ist $K = \hat{K}$, daher $\bar{S} \geqq 3^{-n}\,V(B)$, sonst $\geqq \gamma_n^{-1}\,V(B)$, wo $\gamma_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\,2^{n-1}\ {}_n\mathrm{Min}\,(i, n-i)$.

Der Beweis ist *Zygmund-Marcinkiewicz*[24] nachgebildet.

Beweis: Es sei $\tau_0 = \sup t_j$. Ist $\tau_0 = \infty$, so ist nichts zu beweisen. Es sei also $\tau_0 < \infty$. Dann gibt es ein t_0 mit $t_0 > \tau_0\,(1-\varepsilon)$, $(\varepsilon > 0)$. Es sei nun L_0 die Menge aller K_j, $L_1' \subset L_0$ die Menge der K_j, welche mit K_0 übereinandergreifen, L_1 die übrigen. Es sei allgemein $\tau_i = \sup t_j$ aller K_j die zu L_i gehören, $t_i > \tau_i\,(1-\varepsilon)$, L_{i+1}, die Menge der K_j, die mit K_i-Punkte gemeinsam haben, L_{i+1} die übrigen also $L_i = L_{i+1} + L_{i+1}$. Die τ_i bilden eine im schwächeren Sinne abnehmende Folge. Wir unterscheiden zwei Fälle:

1. Es ist stets $\tau_i \neq 0$.
2. Es gibt ein m, so daß $\tau_m = 0$.

Ad 1. Ist $\lim_{i\to\infty} \tau_i = a > 0$, so sind wir fertig, denn dann ist, da die K_i nach Konstruktion nicht übereinandergreifen, für genügend großes

$$\sum_{i}^{j} V(K_i) > J\,(1-\varepsilon)^n \sum_{i}^{j} \tau_i^n > C\,V(B) \tag{4}$$

Es kann daher $\lim \tau_i = 0$ angenommen werden.

Wir bilden die Vereinigungsmenge $S = \Sigma K_i$, ebenso $S_j = \Sigma K_i$ mit $K_i \subset L_j'$. Dann ist $S = \Sigma S_j$. Denn ist $\bar{K}$ ein Körper im L_0 mit einem $\bar{t}$, dann kann $\bar{K}$ nicht in allen L_j liegen, da es sicher ein j mit $t_j < \bar{t}$ gibt. Dann muß $\bar{K}$ in S_j liegen. Die umgekehrte ist klar. Da $B \subset S$ so gilt also

[24] Fundamenta Mathematica 32.

$$\sum_{j=1}^{\infty} V(S_j) \geqq V(B)$$

Es sei nun K aus einem L_j', dann muß $K \subset L_{j-1}$ sein, greift also mit K_{j-1} übereinander. Es ist also $t \leqq \tau_{j-1}, t_{j-1} \geqq \tau_{j-1}(1-\varepsilon)$, daher $t \leqq \frac{1}{1-\varepsilon} t_{j-1}$, d. h. $(p - p_{j-1}) u \leqq H(u) t + H(-u) t_{j-1}$ (vgl. dazu § 12) Daraus folgt für jedes x von K

$$\begin{aligned}(x - p_{j-1}) u &= (x - p) u + (p - p_{j-1}) u \\ &\leqq (H(u) + H(-u) + \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} H(u)) t_{j-1} = H_1 t_{j-1} \qquad (6)\end{aligned}$$

Es ist daher H_1 die Stützfunktion von $\overline{K} = 2\hat{K} + \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} K$. Es liegt also K in $\overline{K}_{j-1}: (x - p_{j-1}) u \leqq H_1 t_{j-1}$, daher auch $L_j \subset K_{j-1}$. Daraus folgt $V(S_j) \leqq V(\overline{K}_{j-1})$, also nach (5)

$$\frac{V(\overline{K})}{V(K)} \sum_{j=1}^{\infty} V(K_{j-1}) \geqq V(B)$$

daher

$$S \geqq \frac{V(K)}{V(\overline{K})} V(B)$$

Dies gilt für jedes ε und daraus folgt die Behauptung.

Es ist $V(\overline{K}) \leqq V(K) \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 2^{n-i}\, {}_n\mathrm{Min}(i, n-i)$, wie man analog zu *Bonnesen-Fenchel* 53 nachweist.

Der Fall 2 wird genau so behandelt.

Wir wollen in einem Spezialfall den Sachverhalt noch genauer untersuchen. Wir setzen jetzt voraus, daß die K_i einen Mittelpunkt besitzen und $F(p_i - p_0) \geqq \mathrm{Max}(t_i, t_j)$ ist.

Dann gilt zunächst folgender

Hilfssatz: Es sei eine endliche Menge von Körpern K_i mit obiger Voraussetzung gegeben. Es sei $t_0 \leqq t \leqq \ldots \leqq t_j$. Dann können höchstens $5^n - 1$ Körper K_j mit K_0 innere Punkte gemeinsam haben.

Beweis: Die Anzahl der K_j, die mit K_0 übereinandergreifen, sei c. K_i kann nur dann mit K_0 übereinandergreifen, wenn $F(p_i - p_0) < t_0 + t_i$ ist. Ordnen wir p_i den Punkt

$$\bar{p}_i = (t_0 + t_i)^{-1} (p_0 (t_i - t_0) + 2 p_i t_0) \qquad (7)$$

zu, so greifen K_0 und K_i nur dann übereinander, wenn $F(\bar{p}_i - p_0) < 2 t_0$ ist. Weiter ist stets für zwei solche Punkte $\bar{p}_i$, $\bar{p}_j$ $F(\bar{p}_i - p_j) > t_0$, denn es ist

$$\bar{p}_i - \bar{p}_j = \frac{2\,t_0}{t_0 + t_j}\,[p_j - p_i + \frac{t_i - t_j}{t_0 + t_i}\,(p_i - p_0)]$$

also

$$F\,(\bar{p}_i - \bar{p}_j) \geqq \frac{2\,t_0}{t_0 + t_j}\,[\mathrm{Max}\,(t_i, t_j) - |\,t_i - t_j\,|] \geqq t_0.$$

Die $\bar{p}_i$ bilden also eine $F - t_0$-Konfiguration von $F\,(x - p_0) \leqq 2\,t_0$. Daher ist nach Satz 4, Folgerung

$$c + 1 \leqq (2 + \tfrac{1}{2})^n$$

daher $c \leqq 5^n - 1$ w.z.b.w.

Daraus folgt

Satz 37: Liegt eine beschränkte Menge von Körpern K_j vor, mit $F\,(p_i - p_j) \geqq \mathrm{Max}\,(t_i, t_j)$, so kann sie in höchstens 5^n-Teilmengen so aufgespalten werden, daß die K_i, die in einer Teilmenge liegen, nicht übereinandergreifen.

Dabei verstehen wir unter einer beschränkten Menge, eine Menge, die im endlichen liegt.

Beweis: Zunächst ist die Anzahl der K_j höchstens abzählbar. Wir ordnen sie so an, daß $t_1 \geqq t_2 \geqq t_3 \geqq \ldots$

Wir bezeichnen die gesuchten Teilmengen mit T_i ($i \leqq 5^n$). In T_i nehmen wir zunächst die K_i ($i \leqq 5^n$) auf. Jetzt wenden wir vollständige Induktion an. Es sei schon gezeigt, daß K_1, K_j in einen dre T_i liegen. Dann muß dies auch bei K_{j+1} gelten. Denn sonst gäbe es in jedem T_i einen Körper, der mit K_{j+1} übereinandergreifen würde, was nach dem obigen Hilfssatz nicht geht. w.z.b.w.

Ist die Menge der K_i nicht beschränkt, so muß 5^n durch $2 \cdot 5^n$ ersetzt werden.

Der Satz gilt auch, wenn nur

$$F\,(p_i - p_j) \geqq \mathrm{Max}\,(t_i, t_j) - \varepsilon\,\mathrm{Min}\,(t_i, t_j)$$

für $0 < \varepsilon < 5^{-n}$ vorausgesetzt wird.

Bei Kugeln kann 5^n unter Benutzung von §9 durch $[\frac{n+2}{2}(2\sqrt{2}+1)^n]$ ersetzt werden.

Aus Satz 35 folgt wieder Satz 34, allerdings mit 5^{-n} statt 3^{-n}. Aus Satz 34, bzw. 35 können der Vitalische Überdeckungssatz und seine Verallgemeinerungen gefolgert werden (*Besicovitsch*[25]).

---

[25] Für $n = 2$ und $K =$ Kreis Besicovitch, Proc. Cambridge 41 (1945).

Über Maßzahlen und Ungleichungen bei Mittelpunktseikörpern.

Von
H. Hadwiger, Bern.

(Eingelangt am 13. August 1948.)

Unter einem Mittelpunktseikörper wollen wir hier einen konvexen Körper mir Mittelpunkt und regulärem Rand verstehen. Der Mittelpunkt ist dann notwendig ein innerer Punkt und jeder Randpunkt gestattet genau eine Stützebene. Wir beschränken unsere Ausführung auf den dreidimensionalen Raum, obwohl einer sinngemäßen Erweiterung keine wesentlichen Schwierigkeiten entgegenstehen.

Der Zweck der vorliegenden kurzgefaßten Note ist es, darauf aufmerksam zu machen, daß sich dem System der vier fundamentalen Maßzahlen V, F, M und C, nämlich dem Volumen, der Oberfläche, dem Integral der mittleren Krümmung und dem numerischen Wert $C = 4\pi/3$, einem Fundamentalsystem also, welches wie bekannt die Maßgeometrie der allgemeinen konvexen Körper beherrscht, ein anderes Maßzahlensystem V, F, $\overline{M}$ und $\overline{C}$ gegenüberstellen läßt, das man bei der Beschränkung auf Mittelpunktseikörper in eindeutiger und einfacher Weise erklären kann[1]. Das charakteristische Merkmal dieser Maßzahlen ist durch den sicher erwähnenswerten Umstand gegeben, daß für sie die wesentlichsten Ungleichungen, welche aus der *Brunn-Minkowski*'schen Theorie herausfließen, ebenfalls gelten, aber gerade im umgekehrten Sinn. Allerdings sind diese Ungleichungen in ihrer Art elementarer und werden kaum von weiterreichender Bedeutung sein.

---

[1] Die Konstruktion dieses Maßzahlensystems ist für beliebige eigentliche konvexe Körper möglich — jedoch besteht dann eine Abhängigkeit von dem als Bezugspunkt gewählten inneren Punkt des Körpers. Die Wahl dieses Punktes ist nicht mehr in gleich eindeutig-natürlicher Weise gegeben.

An gleicher Stelle wollen wir darauf hinweisen, daß einer Ausdehnung auf k-dimensionale Eikörper keine grundsätzlichen Schwierigkeiten gegenüberstehen.

I.

Es sei K ein Mittelpunktseikörper mit dem Mittelpunkt O. Zu einem $\varrho > 0$ geben wir zunächst die Konstruktion zweier äußerer Parallelkörper K_ϱ und $\overline{K}_\varrho$ an. Es sei P ein beliebiger Randpunkt von K und ω bezeichne die in P einzige Stützebene. Ferner bezeichne ω_ϱ die parallele Ebene im Abstand ϱ von ω, welche auf der dem Körper K abgewandten Seite von ω liegt. Nun legen wir einerseits durch den Punkt P die zu ω normal stehende Gerade η und andererseits die Verbindungsgerade σ durch den Mittelpunkt O. Durch die beiden Ebenen ω und ω_ϱ werden aus den beiden Geraden η und σ Strecken ausgeschnitten, die wir mit N_ϱ und S_ϱ bezeichnen wollen.

Nun bilden wir die Mengen

$$K_\varrho = K + \Sigma N_\varrho \tag{1}$$

und analog auch

$$\overline{K}_\varrho = K + \Sigma S_\varrho, \tag{$\bar{1}$}$$

wobei die Sigmazeichen die Bildung der Vereinigungsmenge vorschreiben und diese Mengensummation über sämtliche Randpunkte P von K zu erstrecken ist.

Mübelos erkennt man, daß K_ϱ mit dem klassischen äußeren Parallelkörper von K im Abstand ϱ übereinstimmt. In unserem Falle handelt es sich offensichtlich wieder um einen Mittelpunktseikörper.

Die Menge $\overline{K}_\varrho$ stellt dagegen einen i. a. von K_ϱ verschiedenen und i. a. auch nicht konvexen, jedenfalls aber bezüglich O sternförmigen Körper mit Mittelpunkt dar.

Leicht läßt sich einsehen, daß dieser Sternkörper $\overline{K}_\varrho$ den Körper K_ϱ als Teil enthält, d. h. es gilt

$$K_\varrho \subseteq \overline{K}_\varrho. \tag{2}$$

In der Tat: Es sei etwa Q ein Punkt von K_ϱ, der nicht zu K gehört. Die Verbindungsgerade durch O enthält einen zwischen O und Q liegenden Randpunkt P von K. Es bezeichnen wieder ω die Stützebene in P und ω_ϱ die äußere Parallelebene im Abstand ϱ. Da nun, wie bekannt, K_ϱ der Durchschnitt aller durch die Parallelebenen ω_ϱ bezeichneten Stützhalbräume, welche K enthalten, ist, muß offenbar Q in dem durch ω und ω_ϱ begrenzten Raumstreifen liegen. Hieraus erhellt, daß Q auf der durch die beiden schon genannten Ebenen aus dem Mittelpunktsstrahl ausgeschnittenen Strecke liegt. Also liegt Q im Sternkörper $\overline{K}_\varrho$; dies trifft trivialer Weise auch zu, wenn Q zu K gehört. Damit ist offenbar (2) bewiesen.

II.

Wir betrachten nun die Volumina V_ϱ und $\overline{V}_\varrho$ der beiden in I konstruierten Parallelkörper K_ϱ und $\overline{K}_\varrho$.

Nach den bekannten Formeln von *J. Steiner* hat man für den gewöhnlichen Parallelkörper die Volumformel

$$V_\varrho = V + F\varrho + M\varrho^2 + C\varrho^3. \tag{3}$$

Indessen lehrt eine einfache Rechnung, daß man für das Volumen des neu in Betracht gezogenen Sternkörpers ebenfalls einen ganzen rationalen Ausdruck vom dritten Grade in ϱ erhält, so daß bei analoger Bezeichnung der Koeffizienten sich die Volumformel

$$\overline{V}_\varrho = V + F\varrho + \overline{M}\varrho^2 + \overline{C}\varrho^3 \tag{$\overline{3}$}$$

ergibt. Die beiden ersten Terme stimmen somit mit der *Steiner*'schen Formel überein, während die beiden nächsten Terme zwei neue Maßzahlen $\overline{M}$ und $\overline{C}$ definieren. Bevor wir aber auf die Verifikation der Volumformel ($\overline{3}$) eintreten, wollen wir noch die für diese Maßzahlen gültigen Integraldarstellungen angeben. Um den angestrebten parallelgeführten Vergleich mit den klassischen Maßzahlen möglichst vollständig zu gestalten, möchten wir das Interesse zunächst auf die für Mittelpunktseikörper geltenden *Blaschke-Radon*'schen Integrale[2] hinlenken, welche in unserem Zusammenhang sich im Hinblick auf ihren analogen symmetrischen Aufbau zum Vergleiche aufdrängen. Es gelten die Integralformeln:

$$3\,V = \frac{1}{2\pi^3} \int\int\int D\,h(\alpha)\,h(\beta)\,h(\gamma)\,d\omega_\alpha\,d\omega_\beta\,d\omega_\gamma, \tag{4}$$

$$F = \frac{1}{2\,\pi^3} \int\int\int D\,h(\alpha)\,h(\beta)\,d\omega_\alpha\,d\omega_\beta\,d\omega_\gamma, \tag{5}$$

$$M = \frac{1}{2\,\pi^3} \int\int\int D\,h(\alpha)\,d\omega_\alpha\,d\omega_\beta\,d\omega_\gamma, \tag{6}$$

$$3\,C = \frac{1}{2\,\pi^3} \int\int\int D\,d\omega_\alpha\,d\omega_\beta\,d\omega_\gamma. \tag{7}$$

Hierbei bezeichnet $D = |\Delta|$ den absoluten Betrag der Determinante

---

[2] Vgl. *W. Blaschke*: Kreis und Kugel, Leipzig 1916, S. 155—156.

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \\ \beta_1 \beta_2 \beta_3 \\ \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \end{vmatrix},$$

welche aus den Richtungscosinus α_i, β_i, γ_i $(i = 1, 2, 3)$ dreier Raumrichtungen α, β, γ gebildet werden kann. Die dreifachen Integrale erstrecken sich über die Einheitskugel, wobei $d\omega_\alpha$, $d\omega_\beta$, $d\omega_\gamma$ die Oberflächendifferentiale der Einheitskugel bezeichnen, welche sich an den durch die Raumrichtungen α, β, γ bezeichneten Stellen befinden. Endlich ist $h(\alpha)$ ein Richtungsfunktional, welches mit der Stützgröße $p(\alpha)$ von K bezüglich O durch die Relation

$$p(\alpha) = \frac{1}{4\pi} \int |\cos(\alpha\beta)| \, h(\beta) \, d\omega_\beta$$

zusammenhängt.

In erheblich einfacherer Form ergeben sich entsprechende Integralformeln für das neu in Betracht gezogene Maßzahlensystem: Es ist:

$$3V = \int p \, d\Omega, \tag{4}$$

$$F = \int d\Omega, \tag{5}$$

$$\overline{M} = \int \frac{d\Omega}{p}, \tag{6}$$

$$3\overline{C} = \int \frac{d\Omega}{p^2}. \tag{7}$$

Die Integrationen erstrecken sich über die Oberfläche von K; $d\Omega$ bezeichnet das Oberflächendifferential und p die zugehörende Stützgröße von K bezüglich O.

Nun verifizieren wir noch die Volumformel (3). Zunächst hat man für das Volumen des Sternkörpers $\overline{K}_\varrho$ die Formel

$$\overline{V}_\varrho = \frac{1}{3} \int \bar{r}^3 \, d\tau,$$

wobei $\bar{r}$ die Länge der radialen Halbsehne darstellt, welche von einer von O ausgehenden Halbgeraden aus dem Sternkörper ausgeschnitten wird. $d\tau$ bezeichnet weiter das Oberflächenelement der mit dem Körper konzentrischen Einheitskugel, welches durch die erwähnte Halbgerade getroffen wird. — Ist nun weiter r die entsprechende zum Eikörper gehörende radiale Halbsehnenlänge, so hat man wohl einerseits

$$\bar{r} = r + \sigma$$

und andererseits die Relationen

$$r^3 \, d\tau = p \, d\Omega, \quad \sigma p = \varrho r$$

zur Verfügung, mit deren Hilfe man die Volumformel leicht auf die Form

$$\overline{V}_\varrho = \frac{1}{3} \int (p + \varrho)^3 \frac{d\Omega}{p^2}$$

bringen kann. Hieraus ergibt sich mit den Ansätzen ($\bar{4}$) bis ($\bar{7}$) die nachzuweisende Formel ($\bar{3}$).

III.

Endlich treten wir auf die einleitend erwähnten Ungleichungen ein. Zunächst wollen wir die beiden im Maßzahlensystem V, F, M und $C = 4\pi/3$ geltenden *Minkowski*'schen Ungleichungen

$$M^2 - 3 \, C \, F \geqq 0 \tag{8}$$

und

$$F^2 - 3 \, M \, V \geqq 0 \tag{9}$$

in Erinnerung rufen. Durch Wechselwirkung geht aus ihnen die bekannte klassische isoperimetrische Ungleichung

$$F^3 - 27 \, C \, V^2 \geqq 0 \tag{10}$$

hervor.

Diesen drei Ungleichungen stellen wir nun die drei folgenden sich auf das Maßzahlensystem V, F, $\overline{M}$ und $\overline{C}$ beziehenden analogen Ungleichungen gegenüber, welche alle entgegengesetzt gleich sind. Sie lauten:

$$\overline{M}^2 - 3 \, \overline{C} \, F \leqq 0, \tag{$\bar{8}$}$$

$$F^2 - 3 \, \overline{M} \, V \leqq 0, \tag{$\bar{9}$}$$

und endlich auch

$$F^3 - 27 \, \overline{C} \, V^2 \leqq 0. \tag{$\overline{10}$}$$

Der Nachweis dieser Ungleichungen ($\bar{8}$) bis ($\overline{10}$) ist außerordentlich einfach. Es genügt zu verifizieren, daß die entsprechenden Defizite durch die unten angegebenen definiten Mehrfachintegrale dargestellt sind. Es ist nämlich:

$$\overline{M}^2 - 3 \, \overline{C} \, F = -\frac{1}{2} \int\int \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2} \right)^2 d\Omega_1 \, d\Omega_2, \tag{11}$$

$$F^2 - 3\,\overline{M}\,V = -\frac{1}{2}\int\int\left(\sqrt{\frac{p_1}{p_2}} - \sqrt{\frac{p_2}{p_1}}\right)^2 d\Omega_1\, d\,\Omega_2, \tag{12}$$

$$F^3 - 27\,\overline{C}\,V^2 = -\frac{1}{3}\int\int\int\left(\frac{p_2\,p_3}{p_1^2} + \frac{p_3\,p_1}{p_2^2} + \frac{p_1\,p_2}{p_3^2} - 3\right) d\Omega_1\, d\Omega_2\, d\Omega_3. \tag{13}$$

Ein Vergleich der entgegengesetzt gleichen Ungleichungspaare zwingt zum Schlusse, daß offenbar stets

$$M \leqq \overline{M} \text{ und } C \leqq \overline{C} \tag{14}$$

zu gelten hat. Dieser Befund ist im Hinblick auf (2) und (3), bzw. ($\overline{3}$) plausibel.

Zum Schluß sei noch vermerkt, daß in allen in dieser Note angeschriebenen Ungleichungen das Gleichheitszeichen jedenfalls dann steht, wenn der Mittelpunkseikörper K eine Kugel ist.

Zur Eulerschen Summierung Neumannscher und Legendrescher Reihen.

Von
K. Prachar, Wien.

(Eingelangt am 20. August 1948.)

1.

Diese Arbeit zerfällt in zwei Teile. Im ersten Teil (2. bis 4.) werden die zu einer analytischen Funktion $f(z)$ gehörigen Reihen von folgender Form betrachtet

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(z), \tag{1}$$

wo

$$a_n = \frac{2n+1}{2\pi i} \int_C f(t) Q_n(t)\, dt,$$

P_n das n-te Legendresche Polynom, Q_n die Legendreschen Funktionen zweiter Art, C eine Ellipse mit $-1, +1$ als Brennpunkten, die z umschließt. Im Innern und auf C soll f regulär sein. Es ist bekannt, daß diese sogenannte *Neumann*sche Reihe im Innern der größten Ellipse konvergiert, die -1, 1 zu Brennpunkten hat und im Inneren keine singulären Punkte von f enthält. Es ist dies ein Analogon zu der Eigenschaft der Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n w^n, \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{w^{n+1}}\, dw, \tag{1'}$$

im größten Kreis zu konvergieren, der 0 zum Mittelpunkt hat und im Innern keinen singulären Punkt enthält.

K. Knopp hat gezeigt, daß die Reihe (1') noch in einem im allgemeinen weit größeren Bereich durch das *Euler*sche Summierungsverfahren summierbar bleibt (kurz E-summierbar). Dabei heißt $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ E-summierbar, wenn

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a_i$$

konvergent ist. Der Grenzwert dieser Reihe heißt E-Summe. Der Bereich der E-Summierbarkeit bestimmt sich nach *Knopp* folgendermaßen: Man lege durch jeden singulären Punkt ω von $f(w)$ den Kreis[1], für dessen Inneres gilt

$$\left| 1 + \frac{w}{\omega} \right| < 2$$

Dieses Gebiet heiße K_ω. Im Durchschnitt aller K_ω ist die Reihe (1′) noch E-summierbar.

Im folgenden soll nun gezeigt werden, daß für die Reihe (1) etwas ähnliches gilt: auch sie bleibt in einem Bereich E-summierbar, der im allgemeinen das Innere der obigen Ellipse als echten Teil enthält. Der Bereich, für den ich die E-Summierbarkeit beweisen werde, ist viel weniger einfach zu bestimmen, als im Falle der Potenzreihe. Außerdem ist es fraglich, ob er der größte seiner Art ist, was im Fall der Potenzreihe für den Durchschnitt der K_ω von *Knopp* bewiesen wurde.

Im zweiten Teil (5. bis 6.) der vorliegenden Arbeit wird die Legendresche Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} f(x)\, P_n(x)\, dx \right] P_n(x) \tag{2}$$

auf ihre E-Summierbarkeit untersucht, und zwar für die Stelle $x = 1$. Sei

$$s_n = P_0 + 3\, P_1 + \ldots + (2n+1)\, P_n.$$

Dann werden die Teilsummen t_n der Reihe (2)

$$t_n = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} f(x)\, s_n(x)\, dx$$

und das *Euler*sche Mittel der ersten n-Teilsummen wird

$$\frac{1}{2} \left[\binom{n}{0} t_0 + \binom{n}{1} t_1 + \ldots + \binom{n}{n} t_n \right] = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} f(x)\, \frac{1}{2^n} \left[\binom{n}{0} s_0 + \ldots \binom{n}{n} s_n \right] dx.$$

Hier soll insbesondere die Frage beantwortet werden, ob es in $x = 1$ stetige Funktionen gibt, deren Reihe (2) nicht E-summierbar ist. Die Existenz solcher Funktionen ist bekanntlich gleichbedeutend mit der Tatsache, daß die *Lebesgue*schen Konstanten

$$p_n = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \left| \frac{1}{2^n} \left[\binom{n}{0} s_0 + \ldots + \binom{n}{n} s_n \right] \right| dx$$

[1] Wir bezeichnen diesen Kreis in Hinkunft mit R_ω.

mit n gegen ∞ streben. Wir werden zeigen, daß die p_n genau wie $n^{\frac{1}{4}}$ gegen ∞ gehen, das heißt, daß

$$k\, n^{\frac{1}{4}} < |\, p_n\,| < K\, n^{\frac{1}{4}},\ k, K \text{ Konstante.}$$

Nebenbei ergibt sich die folgende Formel[1]

$$\frac{1}{2^n}[\binom{n}{0} s_0(\cos\vartheta) + \ldots + \binom{n}{n} s_n(\cos\vartheta)] = \frac{d}{d\cos\vartheta} P_{n+1}(\cos\vartheta)\cos^{n+1}\frac{\vartheta}{2}.$$

Wenn x im Inneren des Intervalles $(-1, 1)$ liegt, so gibt es jedenfalls in x stetige Funktionen, deren Reihe (2) an der Stelle x nicht E-summierbar ist. Dies folgt aus einem Satz von *Haar* und *Young*.

Das entsprechende einfachere Problem bei Fourierreihen, nämlich die Abschätzung der bei ihrer E-Summierung auftretenden *Lebesgue*schen Konstanten, wurde in einer kürzlich erschienenen Note von *L. Schmetterer* und mir behandelt. Für die Größenordnung der Lebesgueschen Konstanten ergab sich dort $\log n$. Dies ist dieselbe Größenordnung, wie die der bei gewöhnlicher Konvergenz auftretenden Lebesgueschen Konstanten (*Fejer*). Bei der Legendreschen Reihe ist das anders als bei der Fourierreihe. Während bei der E-Summierbarkeit die Größenordnung der Lebesgueschen Konstanten $n^{\frac{1}{4}}$ ist, ist ihre Größenordnung bei gewöhnlicher Konvergenz nach *Gronwall* gleich $n^{\frac{1}{2}}$.

2.

Wenn im folgenden von Ellipsen die Rede ist, so sollen, wenn dies nicht ausdrücklich anders bemerkt wird, Ellipsen mit den Brennpunkten -1 und $+1$ gemeint sein. Wenn $b_0, b_1, \ldots$ irgend eine Folge komplexer Zahlen ist, so soll gesetzt werden

$$E\, b_n = \frac{1}{2^n}[\binom{n}{0} b_0 + \binom{n}{1} b_1 + \ldots + \binom{n}{n} b_n].$$

Die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)\, P_n(z)\, Q_n(t) \tag{3}$$

---

[1] Diese Formel findet sich in der mir zugänglichen Literatur nicht. Zusatz bei der Korrektur: Nach einer freundlichen Mitteilung von Prof. *Szegö* wurde diese Formel von ihm in noch allgemeinerer Gestalt benutzt und bewiesen. Seine Arbeit war mir aber nicht zugänglich [Bull. Amer. Math. Soc. **54** (1948)].

konvergiert, wenn t fest ist, für alle z im Inneren der Ellipse durch t gegen $\frac{1}{t-z}$. Wir wollen beweisen, daß sie in einem größeren Bereich noch E-summierbar zu diesem Wert ist. Dazu benützen wir die *Christoffel*sche Formel

$$\frac{1}{t-z} = \sum_{k=1}^{n} (2k+1) P_k(z) Q_k(t) + \frac{n+1}{t-z} [P_{n+1}(z) Q_n(t) - P_n(z) Q_{n+1}(t)].$$

Wir führen die Bezeichnungen ein

$$\frac{1}{t-z} = s_n + \frac{n+1}{t-z} d_n.$$

Dann ist

$$\frac{1}{t-z} = E s_n + \frac{1}{t-z} E(n+1) d_n.$$

Nun benützen wir die folgende Darstellung der P_n und Q_n

$$P_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (z + \sqrt{z^2-1} \cos\varphi)^n \, d\varphi$$

(Dabei soll $z + \sqrt{z^2-1}$ etwa außerhalb des Einheitskreises liegen.)

$$Q_n = \int_0^{\infty} \frac{du}{(t^2 + \sqrt{t^2-1} \cosh u)^{n+1}}$$

Hier ist $\sqrt{t^2-1}$ so zu wählen, daß $t + \sqrt{t^2-1}$ außerhalb des Einheitskreises liegt. Setzt man $\zeta(\varphi) = z + \sqrt{z^2-1} \cos\varphi$, $\tau(u) = t + \sqrt{t^2-1} \cosh u$, so ist

$$d_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} \left(\frac{\zeta}{\tau}\right)^n \left[\frac{\zeta}{\tau} - \frac{1}{\tau^2}\right] d\varphi \, du$$

$$E(n+1) d_n = \frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (i+1) \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} \left(\frac{\zeta}{\tau}\right)^i \left[\frac{\zeta}{\tau} - \frac{1}{\tau^2}\right] d\varphi \, du$$

Wegen $\sum_{i=0}^{n} (i+1) \binom{n}{i} q^i = (1+q)^{n-1} (1 + (n+1) q)$ hat man also

$$E(n+1) d_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} \left(\frac{1+\frac{\zeta}{\tau}}{2}\right)^{n-1} \left(1 + (n+1)\frac{\zeta}{\tau}\right) \left[\frac{\zeta}{\tau} - \frac{1}{\tau^2}\right] d\varphi \, du,$$

$$|E(n+1) d_n| \leqq \operatorname*{Max}_{\varphi, u} \left|\frac{1+\frac{\zeta}{\tau}}{2}\right|^{n-1} \left|1 + (n+1)\frac{\zeta}{\tau}\right| \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} \left|\frac{\zeta}{\tau} - \frac{1}{\tau^2}\right| d\varphi \, du.$$

Wenn $\max_{\varphi, u} \left| 1 + \frac{\zeta}{\tau} \right| < 2$ ist, geht $E\ (n+1)\ d_n \longrightarrow 0$ und die Reihe (3) ist E-summierbar zum Werten $\frac{1}{t-z}$. Im nächsten Abschnitt soll für festes t der Bereich genauer untersucht werden, in dem z liegen muß, damit dies der Fall ist.

3.

Für festes τ_0 und $\left| 1 + \frac{\zeta}{\tau_0} \right| < 2$ liegt ζ im Inneren K_{τ_0}[1] des Kreises mit $-\tau_0$ als Mittelpunkt und $2 \left| \tau_0 \right|$ als Radius. Wenn $0 \leqq u \leqq \infty$, so $1 \leqq \cosh u \leqq \infty$ und es durchläuft $\tau\ (u)$ einen Halbstrahl h_t mit dem Anfangspunkt $t + \sqrt{t^2 - 1}$ der auf der Verbindungsgeraden g_t von $t - \sqrt{t^2 - 1}$ und $t + \sqrt{t^2 - 1}$ liegt und $t - \sqrt{t^2 - 1}$ nicht enthält. Für alle τ dieser Halbgeraden bilden wir das zugehörige Kreisinnere K_τ, in dem $\zeta\ (\varphi)$ für alle φ in $[0, \pi]$ liegen muß. Es muß also $\zeta\ (\varphi)$ für alle φ im Durchschnitt $D\,K_\tau$ aller dieser Kreisscheiben liegen.

Wir wollen die Gestalt von $D\,K_\tau$ ermitteln. Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, daß t im ersten Quadranten liegt. Mit α_p bezeichnen wir den Winkel zwischen den Vektoren $0, p$ und $0, p - \frac{1}{\bar{p}}$[2]. Außerdem soll $\alpha_{\tau\ (0)} = \alpha$ gesetzt werden. $(\tau\ (0) = t + \sqrt{t^2 - 1})$. Die Kreise R_τ, die K_τ beranden, haben ihre Mittelpunkte auf dem Halbstrahl $-h_t$ der zu h_t zentrisch symmetrisch in Bezug auf 0 ist und gehen durch τ. Zu suchen ist der Durchschnitt aller K_τ, deren Mittelpunkt auf $-h_t$ liegt und deren Radius gleich ist der doppelten Entfernung des Mittelpunktes von 0. Wir fällen von 0 das Lot auf $-g_t$ und nennen den Fußpunkt a. Den Abstand eines Punktes s auf $-g_t$ von a nennen wir x, und zwar positiv, wenn s und $-\tau$ auf derselben Seite von a liegen, sonst negativ. Es ist dann $s = s\ (x)$. Ferner setzen wir $r = r\ (x) = \left| s\ (x) \right|$ und bezeichnen K_s, R_s, α_s auch mit K_x, R_x, α_x. Wächst x von Null an, so wachsen auch die Radien $2\,r$ der Kreise R_x, aber R_x schneidet zunächst R_0, d. h. die Differenz $2\,r - 2 \left| a \right| - x$

---

[1] $K_{\tau_0} : \left| 1 + \frac{\zeta}{\tau_0} \right| < 2$

[2] $0 \leqq \alpha_p \leqq \pi$

ist zunächst negativ. Ihr Minimum ist bei $x = \frac{|a|}{\sqrt{3}}$. Für $x > \frac{|a|}{\sqrt{3}}$ enthält $K_{x''}$ $K_{x'}$ wenn $x' < x''$. Für $0 \leqq x \leqq \frac{|a|}{\sqrt{3}}$ hüllen die Kreise R_x die Hälfte einer Ellipse ein. Führen wir für den Augenblick das Lot von 0 auf g_t als y-Achse ein, so lautet die Gleichung dieser Halbellipse

$$\frac{3x^2}{4|a|^2} + \frac{y^2}{4|a|^2} = 1, \quad -\frac{2|a|}{\sqrt{3}} \leqq x \leqq 0 \tag{4}$$

Jeder Kreis R_x berührt (wenn $0 \leqq x \leqq \frac{|a|}{\sqrt{3}}$) diese Halbellipse in zwei zu g_t symmetrischen Punkten von außen. Wächst x von Null bis $\frac{|a|}{\sqrt{3}}$, so rücken diese Berührungspunkte von $-a$, $3a$ aus in den Punkt $a - i\frac{2a}{\sqrt{3}}$, der auf $-g_t$ liegt. Der Durchschnitt aller Bereiche K_x mit $x \geqq b$, wenn $0 \leqq b < \frac{|a|}{\sqrt{3}}$, entsteht also so: Man ersetze den Kreis R_b zwischen den beiden Berührungspunkten mit (4) durch den Ellipsenbogen durch $a - i\frac{2a}{\sqrt{3}}$. Ist $b \geqq \frac{|a|}{\sqrt{3}}$, so besteht der Durchschnitt aus dem Inneren von R_b. Für $x = \frac{|a|}{\sqrt{3}}$ ist $\alpha_x = \frac{\pi}{3}$. Man hat also folgende Fälle:

Ist t so beschaffen, daß $\alpha \leqq \frac{\pi}{3}$ ist, dann ist $DK_t = K_{t(0)}$.

Ist aber $\alpha > \frac{\pi}{3}$, dann ist DK_t ein Bereich, dessen Rand aus einem Kreis- und einem Ellipsenbogen besteht.

Da alle K_t die Kreisscheibe $|w| < |t + \sqrt{t^2 - 1}|$ enthalten, enthält auch DK_t sie. DK_t enthält wegen $|t + \sqrt{t^2 - 1}| > 1$ insbesondere den Einheitskreis. DK_t ist als Durchschnitt konvexer Bereiche konvex.

Soll $\zeta(\varphi)$ für alle φ aus $[0\,\pi]$ in DK_t liegen, so müssen $z + \sqrt{z^2 - 1}$ und $z - \sqrt{z^2 - 1}$ in DK_t liegen. Das Umgekehrte ist auch richtig, denn ζ durchläuft für φ in $[0, \pi]$ die abgeschlossene Verbindungsstrecke

von $z+\sqrt{z^2-1}$ und $z-\sqrt{z^2-1}$ und diese liegt wegen der Konvexität ganz in DK_r, wenn dies für die Endpunkte gilt. $z-\sqrt{z^2-1}$ liegt im Inneren des Einheitskreises, also von selbst in DK_r. Also genügt es, zu fordern, daß $z+\sqrt{z^2-1}$ in DK_r liegt oder, was dasselbe ist, daß z in dem Bereich B_t liegt, der aus DK_r durch die Abbildung mittels der Funktion $\frac{1}{2}(w+\frac{1}{w})$ hervorgeht.

4.

Sei nun $f(z)$ eine analytische Funktion, deren singuläre Stellen nicht auf der Strecke $[-1, +1]$ liegen sollen. Dann gilt der folgende *Satz*: Die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(z),\ a_n = \frac{2n+1}{2\pi i} \int_C f(t) Q_n(t)\, dt \tag{1}$$

ist in einem Bereich B E-summierbar, der folgendermaßen entsteht: Man bilde zu jedem singulären Punkt t' den zugehörigen Bereich $B_{t'}$. Dann ist B der Durchschnitt aller $B_{t'}$.

Beweis: Der Beweis wird mittels des *Cauchy*schen Integralsatzes geführt.

Durch jeden singulären Punkt t' legen wir die Hyperbelhälfte, die aus dem Halbstrahl aus 0 durch $t'+\sqrt{t'^2-1}$ mittels der Abbildung $\frac{1}{2}(w+\frac{1}{w})$ hervorgeht. Das Stück, das dabei dem Halbstrahl von $t'+\sqrt{t'^2-1}$ nach ∞ entspricht, schneiden wir aus der Ebene heraus. So entsteht ein offener Bereich S, der nur aus regulären Punkten der Funktion $f(z)$ besteht (analog dem Mittag-Lefflerschen Stern bei der Potenzreihe). Ich behaupte: Wenn t nicht zu S gehört, dann ist für jedes z aus B $\operatorname{Max}_{\varphi, u} \left| 1+\frac{\zeta}{\tau} \right| < 2$. t liegt nämlich dann auf einem weggelöschten Hyperbelstück, $t+\sqrt{t^2-1}$ auf dem Halbstrahl von 0 aus nach einem Punkt $t'+\sqrt{t'^2-1}$, wo t' ein singulärer Punkt von f ist und $\left|t'+\sqrt{t'^2-1}\right| \leqq \left|t+\sqrt{t^2-1}\right|$. Wegen der letzteren Ungleichung ist die Verbindungslinie von $t'-\sqrt{t'^2-1}$ und $t'+\sqrt{t'^2-1}$ gegen die x-Achse mehr geneigt, als die Verbindungslinie von $t-\sqrt{t^2-1}$ und $t+\sqrt{t^2-1}$. Mit $\bar{\tau}(u)$ bezeichne man den Schnittpunkt des Strahles

durch 0 und $t' + \sqrt{t'^2-1}\cos u$ mit der Verbindungslinie von $t-\sqrt{t^2-1}$ und $t+\sqrt{t^2-1}$. Dann ist $|\bar{\tau}(u)| \geqq |t' + \sqrt{t'^2-1}\cos u|$ für jedes u. Setzen wir $t' + \sqrt{t'^2-1}\cos u = \tau'(u)$, so wird also $|\bar{\tau}(u)| \geqq |\tau'(u)|$ und $K_{\bar{\tau}}$ enthält für jedes u $K_{\tau'}$, daher auch $\underset{u}{DK_{\bar{\tau}}} \supset \underset{u}{DK_{\tau'}}$. Liegt z in B, so liegt $z+\sqrt{z^2-1}$ jedenfalls in $DK_{\tau'}$ also auch in $DK_{\bar{\tau}}$ und damit ist bewiesen, daß $\underset{\varphi,u}{\text{Max}} \left|1+\frac{\zeta}{\tau}\right| = \text{Max}\left|1+\frac{\zeta}{\bar{\tau}}\right| < 2$.

Für jedes feste z_0 in B betrachten wir die Menge T derjenigen t für die $\text{Max}\left|1+\frac{\zeta_0}{\tau}\right| \geqq 2$[1]. Sie liegt nach dem eben Gesagten ganz in S und besteht daher nur aus regulären Punkten von $f(z)$.

Zur genaueren Ermittlung der Struktur von T betrachten wir alle Punkte ω für die

$$\left|1+\frac{\zeta_0}{\omega}\right| \geqq 2 \tag{5}$$

für $\zeta_0 = \zeta_0(\varphi)$ und mindestens ein φ. Bei festem ω_0 ist $\left|1+\frac{\omega_0}{\omega}\right| \geqq 2$ die Kreisscheibe C_{ω_0} mit Mittelpunkt $\frac{\omega_0}{3}$ und Radius $2\frac{|\omega_0|}{3}$. Für φ in $[0,\pi]$ durchläuft ζ_0 die Strecke $[z_0-\sqrt{z_0^2-1},\ z_0+\sqrt{z_0^2-1}]$. Ist auch nur für ein φ $\left|1+\frac{\zeta_0}{\omega}\right| \geqq 2$, so muß ω in $C_{\zeta_0(\varphi)}$ liegen. Das ω aus (5) muß also in der Vereinigung $V\,C_{\zeta_0(\varphi)}$ $(0 \leqq \varphi \leqq \pi)$ aller C_{ζ_0} liegen. Wir setzen $V\,C_{\zeta_0(\varphi)} = G_{z_0}$. Wenn $0 \leqq u \leqq \infty$ durchläuft τ den Halbstrahl h_t. Soll also für mindestens ein Paar φ, u gelten

$$\left|1+\frac{\zeta_0}{\tau}\right| \geqq 2,$$

so muß h_t die abgeschlossene Menge G_{z_0} treffen.

Man überzeugt sich leicht, daß G_{z_0} als die Vereinigung von nur zwei der Kreisscheiben C_{ζ_0} etwa von C_1 und C_2 aufgefaßt werden kann.

h_t trifft die abgeschlossene Menge G_{z_0} jedenfalls dann, wenn bereits der Anfangspunkt $t+\sqrt{t^2-1}$ von h_t in G_{z_0} liegt, dies ist aber nicht notwendig. Den Bereich aller $t+\sqrt{t^2-1}$ für die h_t die Menge G_{z_0} trifft bezeichnen wir mit T'. T ist dann das Bild der außerhalb und auf

[1] $\zeta_0 = z_0 + \sqrt{z_0^2-1}\cos\varphi$

dem Einheitskreis gelegenen Punkte von T' bei der Abbildung $\frac{1}{2}(w+\frac{1}{w})$. Wir behaupten: Der außerhalb des Einheitskreises gelegene Teil RT' des Randes von T' wird von jedem Halbstrahl aus 0 nur in einem Punkt getroffen.

Zum Beweis bemerken wir zunächst, daß (das „Kreisbogenzweieckinnere") G_{z_0} ein Stern in Bezug auf 0 ist. Denn G_{z_0} ist die Vereinigung zweier Kreisscheiben (C_1 und C_2) in deren Durchschnitt 0 liegt. $t+\sqrt{t^2-1}$ gehört dann zu T', wenn h_t G_{z_0} trifft. Die Halbgeraden durch 0, welche auf der reellen oder imaginären Achse liegen, treffen selbstverständlich RT' nur in einem Punkt. Betrachten wir nun einen Halbstrahl s, der etwa in den ersten Quadranten zeigen möge. Bewegt sich $t+\sqrt{t^2-1}$ von ∞ gegen den Schnittpunkt σ von s mit dem Einheitskreis, so wächst die Neigung von h_t gegen die x-Achse. Außerdem zeigen alle h_t auf dieselbe Seite von s. Bewegt sich $t+\sqrt{t^2-1}$ auf s von ∞ kommend, so gibt es einen ersten Punkt p_s auf s dessen h_t mit G_{z_0} einen Punkt q_s gemeinsam hat. p_s liege außerhalb des Einheitskreises. Dann ist zu zeigen, daß auch die Punkte zwischen σ und p_s zu T' gehören. Nun gehört die Strecke $0q_s$ ganz zu G_{z_0} (Sterneigenschaft von G_{z_0}!). Die zu den Punkten zwischen σ und p_s gehörigen h_t treffen aber die Strecke $0q_s$ (und also auch G_{z_0}), da sie mit s einen größeren Winkel einschließen als das zu p_s gehörige h_t.

Wir konstruieren nun eine Kurve C' folgendermaßen: Auf jedem Halbstrahl s durch 0 rechnen wir zu C' den näheren von den beiden Schnittpunkten von s mit dem Einheitskreis und dem Rand von T'. C sei das Bild von C' mittels der Abbildung $\frac{1}{2}(w+\frac{1}{w})$. Die Kurve C und ihr Inneres bilden eine abgeschlossene Menge T^*, die die Strecke $[-1, +1]$ enthält. T^* ist die Vereinigung von T und $[-1, +1]$. T^* besteht nur aus regulären Punkten, denn für $[-1, +1]$ war das Voraussetzung und für T wurde es oben gezeigt. Das Innere von C ist einfach zusammenhängend.

Nach dem bisher Gesagten können wir eine Kurve K legen, die T^* in ihrem Inneren enthält und außerdem noch so beschaffen ist, daß in ihrem Inneren und auf ihr nur reguläre Punkte von $f(z)$ liegen. Für alle t auf K ist nach dem oben Gezeigten außerdem Max $\left|1+\frac{\zeta_0}{\tau}\right|<2$ und sogar

$$\text{Max} \left| 1 + \frac{\zeta_0}{\tau} \right| \leqq \vartheta < 2$$

wegen der Abgeschlossenheit von T^*.

Infolge dieser Bedingung konvergieren die *Euler*schen Mittel der Folge:

$$k_n = \sum_{\nu=0}^{n} (2\nu + 1)\, P_\nu (z_0)\, Q_\nu (t)$$

gleichmäßig auf K gegen $\dfrac{1}{t - z_0}$, (t auf K).

Wegen des *Cauchy*schen Integralsatzes gilt also schließlich für jedes z_0 aus B

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_K f(t)\, \frac{1}{t - z_0}\, dt = \frac{1}{2\pi i} \int_K f(t) \lim_n E k_n\, dt =$$

$$= \lim_n \frac{1}{2\pi i} \int_K f\, E\, k_n\, dt = \lim_n E \frac{1}{2\pi i} \int_K f\, k_n\, dt =$$

$$= \lim_{n \to \infty} E \sum_{\nu=0}^{n} (2\nu + 1)\, P_\nu (z_0)\, \frac{1}{2\pi i} \int_K f(t)\, Q_\nu (t)\, dt$$

und damit ist alles bewiesen.

5.

Von nun an sei $x = \cos \vartheta$ und $s_n (x) = P_0 (x) + 3\, P_1 (x) + \ldots + (2n + 1)\, P_n (x)$.

Es soll zunächst ein einfacherer Ausdruck für die Lebesgueschen Konstanten

$$p_n = \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{1}{2^n} \left| \binom{n}{0} s_0 (\cos \vartheta) + \ldots + \binom{n}{n} s_n (\cos \vartheta) \right| d \cos \vartheta$$

hergeleitet werden. Dazu beweisen wir die folgende Beziehung

$$E_n (\cos \vartheta) = \frac{1}{2^n} \left[\binom{n}{0} P_0 (\cos \vartheta) + \ldots + \binom{n}{n} P_n (\cos \vartheta) \right] =$$

$$= \cos^n \frac{\vartheta}{2}\, P_n \left(\cos \frac{\vartheta}{2}\right), \quad 0 \leqq \vartheta \leqq \pi.$$

Beweis: Wir benutzen folgendes: Aus

$$b_n = \frac{1}{2^n} \left[\binom{n}{0} a_0 + \ldots + \binom{n}{n} a_n \right]$$

folgt $$\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = \frac{2}{2-z} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{z}{2-z}\right)^n$$

Es ist also

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\vartheta)\, z^n = \frac{1}{\sqrt{z^2 - 2\cos\vartheta\, z + 1}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} E_n(\cos\vartheta)\, z^n = \left[z^2 \frac{1+\cos\vartheta}{2} - 2z\frac{1+\cos\vartheta}{2} + 1\right]^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P_n\left(\sqrt{\frac{1+\cos\vartheta}{2}}\right)\left(\sqrt{\frac{1+\cos\vartheta}{2}}\right)^n z^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P_n\left(\cos\frac{\vartheta}{2}\right)\cos^n\frac{\vartheta}{2}\, z^n.$$

Damit ist die obige Formel bewiesen[1]. Weiter gilt die bekannte Formel

$$s_n(x) = P'_n(x) + P'_{n+1}(x)$$

und daraus folgt mit Hilfe obiger Beziehung

$$\frac{1}{2^n}\left[\binom{n}{0} s_0(x) + \ldots + \binom{n}{n} s_n(x)\right] = E'_{n+1}(x)$$

und schließlich für die Lebesgueschen Konstanten der Ausdruck

$$p_{n-1} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \left|\frac{d}{d\cos\vartheta} E_n(\cos\vartheta)\right| d\cos\vartheta$$

6.

Bezeichnen wir die Nullstellen von $\frac{d}{d\cos\vartheta} E_n(\cos\vartheta)$ im Inneren von $(0, \pi)$, also die Stellen der Maxima und Minima von $E_n(\cos\vartheta)$, absteigend geordnet mit

$$\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots \vartheta_l, \qquad l = \left[\frac{n-1}{2}\right].$$

Dann ist

$$2p_{n-1} = [E_n(1) - E_n(\cos\vartheta_1)] - [E_n(\cos\vartheta_1) - E_n(\cos\vartheta_2)] + \ldots +$$

$$+ (-1)^{l-1}\left[E_n(\cos\vartheta_l) - E_n(-1)\right] = \cos^n\frac{O}{2} P_n(\cos O) +$$

$$+ 2\left[\left|\cos^n\frac{\vartheta_1}{2} P_n\left(\cos\frac{\vartheta_1}{2}\right)\right| + \ldots + \left|\cos^n\frac{\vartheta_l}{2} P_n\left(\cos\frac{\vartheta_l}{2}\right)\right|\right].$$

Die Summe in der eckigen Klammer nennen wir K_n.

[1] Daraus folgt insbesondere: $E_{2n}(x)$ hat bei $x=-1$ eine Nullstelle n-ter Ordnung, $E_{2n+1}(x)$ eine solche $(n+1)$-ter Ordnung.

Wir behaupten nun

Satz: $k n^{\frac{1}{4}} < K_n < K n^{\frac{1}{4}}$ (k, K Konstante).

Beweis: Wir schreiben $t = \frac{\vartheta}{2}$, $t_i = \frac{\vartheta_i}{2}$. Nach Bruns liegen die Nullstellen von $P_n(\cos t)$ in den Intervallen

$$\frac{2\lambda - 1}{2n+1}\pi \leqq t \leqq \frac{2\lambda}{2n+1}\pi, \quad \lambda = 1, 2, \ldots, n$$

(Wir brauchen sie nur für $0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}$). Nach *Gronwall* gelten folgende Abschätzungen für die Legendreschen Polynome ($n \geqq 2$)

$$|P_n \cos t)| > \frac{b}{\sqrt{n}\sqrt{\sin t}} \quad \text{für} \quad \frac{2\lambda}{2n+1}\pi \leqq t \leqq \frac{2\lambda+1}{2n+1}\pi,$$
$$\lambda = 1, 2, \ldots (n-1) \qquad (6)$$

$$|P_n(\cos t)| < \frac{A}{\sqrt{n}\sqrt{\sin t}} \quad \text{für } 0 \leqq t \leqq \pi, \quad n \geqq 1 \qquad (7)$$

b, A positive Konstante. Ferner gibt es ein a mit $0 < a < 1$, so daß

$$\cos^n t \geqq a \text{ für } 0 \leqq t \leqq \frac{1}{\sqrt{n}} \qquad (8)$$

Daraus folgt jetzt

$$K_n > a\,b\,n^{-\frac{1}{2}}\left[\left(\sin\frac{3\pi}{2n+1}\right)^{-\frac{1}{2}} + \left(\sin\frac{5\pi}{2n+1}\right)^{-\frac{1}{2}} + \ldots + \left(\sin\frac{(2g+1)}{2n+1}\pi\right)^{-\frac{1}{2}}\right], \quad g = \left[\frac{2}{\pi}\sqrt{n}\right] - 1$$

$$K_n > a\,b\,n^{-\frac{1}{2}}\left[\left(\frac{3\pi}{2n+1}\right)^{-\frac{1}{2}} + \left(\frac{5\pi}{2n+1}\right)^{-\frac{1}{2}} + \ldots + \left(\frac{2g+1}{2n+1}\right)^{-\frac{1}{2}}\right],$$

Andererseits $K_n > k n^{\frac{1}{4}}$

$$K_n < \frac{A}{\sqrt{n}}\left[\cos^n\frac{2\pi}{2n+1}\left(\sin\frac{2\pi}{2n+1}\right)^{-\frac{1}{2}} + \cos^n\frac{4\pi}{2n+1}\left(\sin\frac{4\pi}{2n+1}\right)^{-\frac{1}{2}} + \right.$$
$$+ \ldots + \cos^n\frac{2\pi[\sqrt{n}]}{2n+1}\left(\sin\frac{2\pi[\sqrt{n}]}{2n+1}\right)^{-\frac{1}{2}} +$$
$$\left. + \ldots + \cos^n\frac{2\pi l}{2n+1}\left(\sin\frac{2\pi l}{2n+1}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]$$

Nun ist

$$\frac{1}{\sin x} \leqq \frac{1}{x}\frac{\pi}{2} \quad 0 < x \leqq \frac{\pi}{2}$$

Daher sind die ersten $[\sqrt{n}]$ Glieder $\left(B = A\frac{\pi}{2}\right)$

$$< \frac{B}{\sqrt{n}}\left[\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right)^{-\frac{1}{2}} + \ldots + \left(\frac{2\pi[\sqrt{n}]}{2n+1}\right)^{-\frac{1}{2}}\right] < K_1 n^{\frac{1}{4}}$$

Die übrigen Glieder sind:

$$< \frac{A}{\sqrt{n}}\left[\sin\frac{2\pi([\sqrt{n}]+1)}{2n+1}\right]^{-\frac{1}{2}}\left[\cos^n\frac{2\pi([\sqrt{n}]+1)}{2n+1} + \ldots + \right.$$

$$\left. + \cos^n\frac{2\pi l}{2n+1}\right]$$

$$< \frac{B}{\sqrt{n}}\left[\frac{2\pi([\sqrt{n}]+1)}{2n+1}\right]^{-\frac{1}{2}}\left[\cos^n\frac{2\pi}{2n+1} + \cos^n 2\cdot\frac{2\pi}{2n+1} + \ldots + \right.$$

$$\left. + \cos^n\frac{2\pi l}{2n+1}\right]$$

$$< B_1 n^{-\frac{1}{4}}(2n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\,dt < K_2 n^{\frac{1}{4}}, da \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\,dt \sim \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Also

$$K_n < K n^{\frac{1}{4}}, \quad \text{w. z. z. w.}$$

Literatur.

Fejer L., Lebesguesche Konstanten und divergente Fourierreihen, J. f. d. reine u. angew. Mathematik, 138 (1910).

Gronwall T. H., Über die Laplacesche Reihe, Math. Ann. 74 (1913).

Haar A., Reihenentwicklungen nach Legendreschen Polynomen, Math. Ann. 78 (1918).

Knopp K., Über das Eulersche Summierungsverfahren, Math. Zeitschr. 15 (1922).

Schmetterer L. und *Prachar K.*, Zur Eulerschen Summierung Fourier'scher Reihen, Anz. d. Akad. d. Wiss., Wien 5 (1948).

Die Böschungslinien des elliptischen Raumes.

Von
Hans Robert Müller, Graz.

(Eingelangt am 15. September 1948.)

Mit 1 Abbildung.

Die Böschungslinien oder allgemeinen Schraublinien des Euklidischen Raumes sind durch die Eigenschaft gekennzeichnet, mit einer festen Richtung (oder einer festen Ebene) des Raumes einen konstanten Winkel einzuschließen. — Diese Kurven sind somit isogonale Trajektorien der Erzeugenden eines Zylinders, den wir parallel zu dieser festen Richtung durch die Kurve legen können.

Diese einfache Feststellung gestattet nun eine Übertragung des Begriffes „Böschungslinie" in die elliptische Geometrie, wenn wir die Definition des Parallelismus im Sinne von *Clifford* übernehmen: Wir bezeichnen eine Kurve als *Böschungslinie* oder *allgemeine Schraublinie des elliptischen Raumes*, wenn durch sie ein *Clifford*scher Links- oder Rechtszylinder so legbar ist, daß die Kurve isogonale Trajektorie der Zylindererzeugenden wird.

Wie im folgenden unter Verwendung genormter Quaternionen ausgeführt werden soll, erweist sich diese Erklärung einer Böschungslinie des elliptischen Raumes als fruchtbar: Viele Eigenschaften und Sätze über diese Kurvenklasse, die aus der Euklidischen Geometrie bekannt sind, gelten in gleicher oder wenig modifizierter Weise auch im elliptischen Raum.

Vorerst einige vorbereitende Hinweise[1]: Einem Punkt $\mathfrak{P}$ des elliptischen Raumes mit der Krümmung $+1$ ordnen wir eine genormte Quaternion

$$\mathfrak{P} = p_0 + p_1 e_1 + p_2 e_2 + p_3 e_3$$

[1] Vgl. *W. Blaschke*, Nicht-Euklidische Geometrie und Mechanik I, II, III. Hamburger Math. Einzelschr., 34. Heft (1942).

H. R. Müller, Über Striktionslinien von Kurven- und Geradenscharen im elliptischen Raum. Monatsh. f. Math., Bd. 52 (1948), S. 138—161. Hier findet sich auch eine Zusammenstellung der wichtigsten Formeln der Kurven- und Flächentheorie, auf die im folgenden Bezug genommen wird.

zu. Die Normierungsbedingung ist

$$(\mathfrak{P}\mathfrak{P}) = \mathfrak{P}\overline{\mathfrak{P}} = \overline{\mathfrak{P}}\mathfrak{P} = \Sigma p_i^2 = 1,$$

wo $\overline{\mathfrak{P}}$ die zu $\mathfrak{P}$ konjugierte Quaternion ist. Die Zuordnung zwischen Quaternion und Punkt ist zufolge dieser Bedingung bis auf den Faktor ± 1 eindeutig: $\mathfrak{P}$ und $-\mathfrak{P}$ stellen denselben Punkt $\mathfrak{P}$ dar. Die p_i sind also homogene Punktkoordinaten in einem projektiven dreidimensionalen Raum, in dem durch die folgende Erklärung des *Abstandes* ϑ der Punkte $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ eine *elliptische Maßbestimmung* eingeführt wird.

$$\cos\vartheta = (\mathfrak{P}\mathfrak{Q}) = \Sigma p_i q_i = \frac{1}{2}(\mathfrak{P}\overline{\mathfrak{Q}} + \mathfrak{Q}\overline{\mathfrak{P}}) \tag{1}$$

Für benachbarte Punkte $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P} + d\mathfrak{P}$ ergibt sich das *Bogenelement* des elliptischen Raumes

$$d\vartheta^2 = (d\mathfrak{P}\, d\mathfrak{P}) = \Sigma dp_i^2 \tag{2}$$

Zwei Punkte $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ mit der Entfernung $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ heißen *orthogonal* oder *polar* (nämlich in Bezug auf das absolute Gebilde der elliptischen Maßbestimmung). Die Bedingung hiefür ist

$$(\mathfrak{P}\mathfrak{Q}) = 0 \tag{3}$$

Alle Punkte $\mathfrak{X}$, die zu einem festen Punkt $\mathfrak{P}$ polar sind, erfüllen die *Polarebene* von $\mathfrak{P}$. Ihre Gleichung ist

$$(\mathfrak{P}\mathfrak{X}) = 0$$

Führen wir homogene Ebenenkoordinaten im Raum ein, so können wir dieser Polarebene des Punktes $\mathfrak{P}$ gleichfalls die Quaternion $\mathfrak{P}$ zuordnen. (3) ist dann die *Inzidenzbedingung* des Punktes $\mathfrak{P}$ und der Ebene $\mathfrak{Q}$ oder umgekehrt des Punktes $\mathfrak{Q}$ und der Ebene $\mathfrak{P}$. Durch (1) wird also auch der Winkel der Ebenen $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ gemessen, er ist gleich dem Abstand ihrer Pole. Wir können (2) somit auch als *Winkelelement* deuten, falls wir durch die Quaternionen Ebenen darstellen. — Wegen der Nicht-Singularität des absoluten Gebildes, der *absoluten Quadrik* mit der Gleichung

$$(\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}) = 0$$

in Punkt-, wie in Ebenenkoordinaten besteht in der elliptischen Geometrie völlige *metrische Dualität.*

Sind $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ zwei zu einander polare Punkte, so durchläuft der Punkt

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{P}\cos\varphi - \mathfrak{Q}\sin\varphi \text{ für } 0 \leqq \varphi < \pi$$

genau einmal die gerichtete Gerade $\{\mathfrak{P}\mathfrak{Q}\} = [\mathfrak{r}, \mathfrak{r}']$. Der Einheitsvektor $\mathfrak{r} = \mathfrak{Q}\,\overline{\mathfrak{P}}$ heißt der *linke* und $\mathfrak{r}' = \overline{\mathfrak{P}}\,\mathfrak{Q}$ der *rechte Richtungsvektor*. Stimmen die linken Richtungsvektoren zweier Geraden überein, so nennen wir sie *linksparallel* im Sinne von *Clifford*. Übereinstimmung der rechten Richtungsvektoren führt zu *rechtsparallelen* Geraden.

Zwei gerichtete Gerade $[\mathfrak{r}_i, \mathfrak{r}_i']$, $(i = 1, 2)$ sind zu einander polar, wenn $\mathfrak{r}_1 = \mathfrak{r}_2$, $\mathfrak{r}'_1 = -\mathfrak{r}'_2$ ist. —

Den Winkel ϑ zweier sich schneidender Geraden $\{\mathfrak{P}\mathfrak{Q}_i\} = [\mathfrak{r}_i, \mathfrak{r}_i']$ erklären wir durch

$$\cos\vartheta = (\mathfrak{Q}_1\mathfrak{Q}_2) = (\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2) = (\mathfrak{r}'_1\mathfrak{r}'_2).$$

Hiebei sind die letzten Produkte die gewöhnlichen Skalarprodukte der Richtungsvektoren.

Vier paarweise orthogonale Punkte $\mathfrak{P}_i$ mit der Determinante $(\mathfrak{P}_0\,\mathfrak{P}_1\,\mathfrak{P}_2\,\mathfrak{P}_3) = +1$ bilden einen *Polarvierling* oder ein *Polartetraeder*. Es gilt

$$(\mathfrak{P}_i\,\mathfrak{P}_j) = \varepsilon_{ij}$$

Die paarweise polaren Kanten bezeichnen wir mit G_i und G_i^*. Ihre Richtungsvektoren sind $\mathfrak{r}_i$ und $\mathfrak{r}'_i$, so daß

$$G_i = [\mathfrak{r}_i, \mathfrak{r}_i'], G_i^* = [\mathfrak{r}_i, -\mathfrak{r}_i'] \text{ und}$$
$$(\mathfrak{r}_i\,\mathfrak{r}_j) = (\mathfrak{r}_i'\,\mathfrak{r}_j') = \varepsilon_{ij} \quad \text{gilt.}$$

Unsere Kurve werde von der Ecke $\mathfrak{P}_0$ des bewegten Polartetraeders so beschrieben (Abhängigkeit von einem reellen Parameter v), daß die Kante $G_1 = \{\mathfrak{P}_0\,\mathfrak{P}_1\}$ in die Kurventangente, $G_2 = \{\mathfrak{P}_0\,\mathfrak{P}_2\}$ in die Hauptnormale und $G_3 = \{\mathfrak{P}_0\,\mathfrak{P}_3\}$ in die Binormale falle. Bei dieser Wahl des begleitenden Polartetraeders gilt folgendes System von *Ableitungsgleichungen*, das den *Frenet*schen Formeln der Euklidischen Kurventheorie entspricht:

$$\left.\begin{aligned} d\,\mathfrak{P}_0 &= +\alpha_1\,\mathfrak{P}_1 \\ d\,\mathfrak{P}_1 &= -\alpha_1\,\mathfrak{P}_0 + \beta_3\,\mathfrak{P}_2 \\ d\,\mathfrak{P}_2 &= -\beta_3\,\mathfrak{P}_1 + \beta_1\,\mathfrak{P}_3 \\ d\,\mathfrak{P}_3 &= -\beta_1\,\mathfrak{P}_2 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

sowie

$$\left.\begin{aligned} d\,\mathfrak{r}_1 &= +\omega_3\,\mathfrak{r}_2 & d\,\mathfrak{r}'_1 &= +\omega'_3\,\mathfrak{r}'_2 \\ d\,\mathfrak{r}_2 &= -\omega_3\,\mathfrak{r}_1 + \omega_1\,\mathfrak{r}_3 & d\,\mathfrak{r}'_2 &= -\omega'_3\,\mathfrak{r}'_1 + \omega'_1\,\mathfrak{r}'_3 \\ d\,\mathfrak{r}_3 &= -\omega_1\,\mathfrak{r}_2 & d\,\mathfrak{r}'_3 &= -\omega'_1\,\mathfrak{r}'_2 \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Hiebei bestehen zwischen den als Koeffizienten auftretenden *Differentialen* die Beziehungen:

$$\omega_1 = \beta_1 + \alpha_1,\ \omega'_1 = \beta_1 - \alpha_1,\ \omega_3 = \omega'_3 = \beta_3.$$

Den Quotienten

$$\frac{\beta_3}{\alpha_1} = \varkappa_0 \text{ und } \frac{\beta_1}{\alpha_1} = \tau_0$$

kommt hiebei die Bedeutung von *Krümmung* und *Torsion* der Kurve $\mathfrak{P}_0(v)$ zu.

Durch den Punkt $\mathfrak{P}_0$ der Böschungslinie gehe nun, unter dem konstanten Winkel $\vartheta \neq 0$ gegen die Kurventangente geneigt, die Erzeugende

$$Q_0 = \{\mathfrak{P}_0 \mathfrak{Q}_0\} = [\mathfrak{q}_0, \mathfrak{q}'_0]$$

des *Clifford*-Zylinders, den wir kurz als „Böschungszylinder" bezeichnen wollen. Für einen Linkszylinder gilt $\mathfrak{q}_0 = \text{konst.}$, hingegen für einen Rechtszylinder $\mathfrak{q}'_0 = \text{konst.}$ Spannen wir die Q_0 charakterisierenden Größen $\mathfrak{Q}_0$, bzw. $\mathfrak{q}_0$, $\mathfrak{q}'_0$ auf den entsprechenden Elementen des Polartetraeders mit Koeffizienten a_i auf

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{Q}_0 &= a_1 \mathfrak{P}_1 + a_2 \mathfrak{P}_2 + a_3 \mathfrak{P}_3 \\ \mathfrak{q}_0 &= \mathfrak{Q}_0 \overline{\mathfrak{P}}_0 = a_1 \mathfrak{r}_1 + a_2 \mathfrak{r}_2 + a_3 \mathfrak{r}_3 \\ \mathfrak{q}'_0 &= \overline{\mathfrak{P}}_0 \mathfrak{Q}_0 = a_1 \mathfrak{r}'_1 + a_2 \mathfrak{r}'_2 + a_3 \mathfrak{r}'_3 \end{aligned}\right\}$$

so muß also $(\mathfrak{P}_1 \mathfrak{Q}_0) = a_1 = \cos\vartheta = \text{konst.}$ sein wobei ϑ obiger von der Kurventangente und der Erzeugenden durch $\mathfrak{P}_0$ eingeschlossene, konstante Winkel ist. Unter Verwendung der Ableitungsgleichungen (5) werden wir für einen Linkszylinder[2], also für $d\,\mathfrak{q}_0 = 0$ auf

$$a_2 = 0,\ a_1 \omega_3 - a_3 \omega_1 = 0,\ da_3 = 0 \tag{6}$$

geführt. Die Normierungsbedingung

$$(\mathfrak{Q}_0 \mathfrak{Q}_0) = (\mathfrak{q}_0 \mathfrak{q}_0) = (\mathfrak{q}'_0 \mathfrak{q}'_0) = \Sigma a_i^2 = 1$$

führt somit auf

$$a_1 = \frac{\omega_1}{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_3^2}} = \cos\vartheta, \quad a_3 = \frac{\omega_3}{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_3^2}} = \sin\vartheta \tag{7}$$

und

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{Q}_0 &= \mathfrak{P}_1 \cos\vartheta + \mathfrak{P}_3 \sin\vartheta \\ \mathfrak{q}_0 &= \mathfrak{r}_1 \cos\vartheta + \mathfrak{r}_3 \sin\vartheta \\ \mathfrak{q}'_0 &= \mathfrak{r}'_1 \cos\vartheta + \mathfrak{r}'_3 \sin\vartheta \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Aus diesen Darstellungen erkennen wir sofort, daß die Böschungslinien des elliptischen Raumes folgende Eigenschaften dieser Kurvenklasse der Euklidischen Geometrie besitzen:

---

[2] Für einen Rechtszylinder verlaufen die Überlegungen in gleicher Weise und sollen im folgenden nicht weiter ausgeführt werden.

Die Zylindererzeugende Q_0 liegt in der *rektifizierenden Ebene* $\mathfrak{P}_2 = \{\mathfrak{P}_0, \mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_3\}$ der Böschungslinie[3]. Die Tangentialebene des Zylinders im Punkte $\mathfrak{P}_0$ ist durch Q_0 und G_1 bestimmt, deckt sich also mit der rektifizierenden Ebene $\mathfrak{P}_2$. Die *Flächennormale* des Zylinders fällt somit in die Hauptnormale G_2 der Böschungslinie und enthält die Schmiegebene $\mathfrak{P}_3 = \{\mathfrak{P}_0, \mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2\}$ der Kurve $\mathfrak{P}_0$. Die Böschungslinie ist daher eine *geodätische Linie* des *Clifford*-Zylinders, der als *rektifizierende Fläche* fungiert. (Bei isometrischer Abbildung des Zylinders auf die Euklidische Ebene gehen die Böschungslinien in Gerade über, die die parallelen „Biegungs"-Bilder der Erzeugenden unter dem konstanten Winkel ϑ schneiden.)

Wegen (6) und (7) gilt für die Böschungskurve die charakteristische Beziehung

$$\omega_3 \cos \vartheta - \omega_1 \sin \vartheta = 0$$

oder wegen $\vartheta \neq 0$

$$\omega_1 = \omega_3 \operatorname{ctg} \vartheta \tag{9}$$

Daraus folgt aber sofort

$$\tau_0 + 1 = \varkappa_0 \operatorname{ctg} \vartheta \tag{10}$$

Diese Relation[4] zwischen Krümmung und Torsion einer Böschungslinie tritt an die Stelle der bekannten, meist nach *Bertrand* benannten Eigenschaft dieser Kurven im Euklidischen Raum, ein konstantes Verhältnis von Krümmung und Torsion zu besitzen. — Auch umgekehrt können wir aus der Gültigkeit von (10) auf die definierende Eigenschaft der Böschungslinien schließen.

Hieraus folgern wir nun leicht eine weitere charakteristische Bedingung: Eine Kurve ist Böschungslinie auf einem Linkszylinder (kurz *Links-Böschungslinie*), wenn für den linken Richtungsvektor $\mathfrak{r}_1$ ihrer Tangente gilt:

$$(d\,\mathfrak{r}_1, d^2\mathfrak{r}_1, d^3\mathfrak{r}_1) = 0 \tag{11}$$

Denn berechnen wir links diese Determinante, nachdem wir mit Hilfe der Ableitungsgleichungen (5) $d^2\mathfrak{r}_1$ und $d^3\mathfrak{r}_1$ ermittelt haben, so finden wir bis auf einen im allgemeinen nicht verschwindenden Faktor

$$d\left(\frac{\omega_1}{\omega_3}\right) = 0,$$

was aber mit (9) für konstantes ϑ äquivalent ist.

---

[3] Das Symbol $\mathfrak{P}_2 = \{\mathfrak{P}_0, \mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_3\}$ soll ausdrücken, daß die Ebene $\mathfrak{P}_2$ von den Punkten $\mathfrak{P}_0, \mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_3$ aufgespannt wird.

[4] Für einen Rechtszylinder ergibt sich $\tau_0 - 1 = \kappa_0 \cdot \operatorname{ctg} = \kappa_0 \operatorname{ctg} \vartheta$.

(11) kann als elliptisches Gegenstück zu der von *A. R. Forsyth*[5] angegebenen Bedingung $(\mathfrak{x}'', \mathfrak{x}''', \mathfrak{x}^{IV}) = 0$ angesehen werden, die für eine Böschungslinie $\mathfrak{x}$ des Euklidischen Raumes kennzeichnend ist.

Die Tangentenfläche einer Böschungslinie, also die Einhüllende ihrer Schmiegebenen möge als *Böschungsfläche* bezeichnet werden.

Es hüllt als die Ebene $\mathfrak{P}_3 = \{\mathfrak{P}_0, \mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2\}$, als Schmiegebene der von $\mathfrak{P}_0$ beschriebenen Böschungslinie eine Böschungsfläche ein. Der Pol $\mathfrak{P}_3$ der einhüllenden Ebene beschreibe die *Polarkurve* der Böschungsfläche. — Wir schreiben das System (4) in Hinblick auf diese Kurve:

$$\left.\begin{aligned} d\,\mathfrak{P}_3 &= -\beta_1\,\mathfrak{P}_2 \\ d\,\mathfrak{P}_2 &= +\beta_1\,\mathfrak{P}_3 - \beta_3\,\mathfrak{P}_1 \\ d\,\mathfrak{P}_1 &= +\beta_3\,\mathfrak{P}_2 - \alpha_1\,\mathfrak{P}_0 \\ d\,\mathfrak{P}_0 &= +\alpha_1\,\mathfrak{P}_1 \end{aligned}\right\}$$

Wegen (9) gilt für die Krümmung $\varkappa_3 = \dfrac{\beta_3}{\beta_1}$ und die Torsion $\tau_3 = \dfrac{\alpha_1}{\beta_1}$ dieser Kurve die Beziehung

$$\tau_3 + 1 = \varkappa_3 \operatorname{ctg} \vartheta, \tag{12}$$

woraus wir entnehmen, daß diese Polarkurve $\mathfrak{P}_3(v)$ gleichfalls eine Böschungslinie zum festen Winkel ϑ ist. Die Ebene $\mathfrak{P}_0 = \{\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3\}$ fungiert als Schmiegebene dieser Kurve und hüllt die der Ausgangskurve $\mathfrak{P}_0(v)$ polar gegenüberstehende Böschungsfläche ein. — Böschungslinien und Böschungsflächen können somit als *duale Gebilde* angesehen werden.

Wir haben also immer Paare von Böschungslinien $\mathfrak{P}_0(v)$ und $\mathfrak{P}_3(v)$. Ihre Torsionen sind reziprok: $\tau_0\,\tau_3 = 1$. Für ihre Krümmungen gilt, wie man durch Elimination von τ_i aus (10) und (12) findet:

$$\frac{1}{\varkappa_0} + \frac{1}{\varkappa_3} = \operatorname{ctg} \vartheta$$

Beide Kurven besitzen polare Tangenten $G_1 = \{\mathfrak{P}_0\,\mathfrak{P}_1\}$, bzw. $G^*{}_1 = \{\mathfrak{P}_2\,\mathfrak{P}_3\}$ und polare Hauptnormalen $G_2 = \{\mathfrak{P}_0\,\mathfrak{P}_2\}$, bzw. $G^*{}_2 = \{\mathfrak{P}_3\,\mathfrak{P}_1\}$. Die beiden *Binormalen fallen zusammen in die* Gerade $G_3 = \{\mathfrak{P}_0\,\mathfrak{P}_3\}$ und beschreiben eine *orthoide* Regelfläche, deren Striktionslinien die beiden Böschungslinien sind[6].

---

[5] *A. R. Forsyth*, Differential Geometry (1912), S. 28.

[6] Eine orthoide Regelfläche, deren Striktionslinie sämtliche Erzeugenden orthogonal schneidet, ist immer die gemeinsame Binormalenfläche ihrer Striktionslinienzweige. Vgl. *H. R. Müller*, a. a. O. S. 160.

Für die Erzeugende $Q_3 = \{\mathfrak{P}_3\, \mathfrak{Q}_3\} = [\mathfrak{q}_3, \mathfrak{q}'_3]$ des durch die polare Kurve $\mathfrak{P}_3(v)$ legbaren Zylinders ergibt sich wegen (9)

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{Q}_3 &= \mathfrak{P}_0 \sin\vartheta + \mathfrak{P}_2 \cos\vartheta \\ \mathfrak{q}_3 &= \mathfrak{Q}_3\, \overline{\mathfrak{P}}_3 = -\mathfrak{r}_1 \cos\vartheta - \mathfrak{r}_3 \sin\vartheta \\ \mathfrak{q}'_3 &= \overline{\mathfrak{P}}_3\, \mathfrak{Q}_3 = +\mathfrak{r}'_1 \cos\vartheta - \mathfrak{r}'_3 \sin\vartheta \end{aligned}\right\}$$

Wegen $\mathfrak{q}_3 = -\mathfrak{q}_0$ ist also $\mathfrak{P}_3(v)$ eine Linksböschungslinie, was auch schon aus (12) folgt. Bei geeigneter Orientierung der Erzeugenden sind somit die Linkszylinder durch $\mathfrak{P}_0(v)$ und $\mathfrak{P}_3(v)$ parallel, gehören also derselben *Clifford*schen Linkskongruenz an. Die Zylindernormalen in entsprechenden Punkten sind die polaren Kanten G_2 und G_2^* des begleitenden Polartetraeders.

Im Euklidischen Raum stehen Bogenlänge und Krümmung eines Zylindernnormalschnittes in einfacher Beziehung zu den entsprechenden Größen einer auf dem Zylinder verlaufenden Böschungslinie. — Um das elliptische Analogon zu untersuchen, setzen wir die Bedingung dafür an, daß der Punkt

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_0 \cos\varphi - \mathfrak{Q}_0 \sin\varphi$$

der Erzeugenden Q_0 eine orthogonale Trajektorie der Erzeugendenschar des Böschungszylinders durch $\mathfrak{P}_0(v)$ beschreibt:

$$(\mathfrak{P}^*\, d\, \mathfrak{P}) = 0 \tag{13}$$

Hiebei ist

$$\mathfrak{P}^* = \mathfrak{P}_0 \sin\varphi + \mathfrak{Q}_0 \cos\varphi = \mathfrak{P}_0 \sin\varphi + (\mathfrak{P}_1 \cos\vartheta + \mathfrak{P}_3 \sin\vartheta) \cos\varphi$$

der zu $\mathfrak{P}$ auf Q_0 polare Punkt und wegen (4) und (9)

$$d\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_0 (\alpha_1 \cos\vartheta - d\varphi) \sin\varphi + \mathfrak{P}_1 (\alpha_1 - d\varphi \cos\vartheta) \cos\varphi - \mathfrak{P}_2\, \alpha_1 \sin\vartheta \sin\varphi - \mathfrak{P}_3\, d\varphi \sin\vartheta \cos\varphi.$$

Die Orthogonalitätsbedingung (13) geht somit über in

$$\alpha_1 \cos\vartheta - d\varphi = 0.$$

Für die orthogonale Trajektorie unseres Linkszylinders, der wir nun die Bezeichnung $\mathfrak{P}_0^*(v)$ geben wollen, folgern wir durch wiederholtes Differentieren:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{P}_0^* &= +\mathfrak{P}_0 \cos\varphi - (\mathfrak{P}_1 \cos\vartheta + \mathfrak{P}_3 \sin\vartheta) \sin\varphi \\ \mathfrak{P}_1^* &= -\mathfrak{P}_2 \sin\varphi + (\mathfrak{P}_1 \sin\vartheta - \mathfrak{P}_3 \cos\vartheta) \cos\varphi \\ \mathfrak{P}_2^* &= +\mathfrak{P}_2 \cos\varphi + (\mathfrak{P}_1 \sin\vartheta - \mathfrak{P}_3 \cos\vartheta) \sin\varphi \\ \mathfrak{P}_3^* &= +\mathfrak{P}_0 \sin\varphi + (\mathfrak{P}_1 \cos\vartheta + \mathfrak{P}_3 \sin\vartheta) \cos\varphi \end{aligned}\right\} \text{ für } \varphi = \cos\vartheta.\ \int \alpha_1$$

Hiebei benennen wir die auftretenden Koeffizienten entsprechend den Ableitungsgleichungen (4):

$$\alpha^*{}_1 = \alpha_1 \sin\vartheta, \quad \beta_1{}^* = -\alpha_1 \sin\vartheta, \quad \beta_3{}^* = \frac{\beta_1 - \alpha_1 \cos 2\vartheta}{\cos\vartheta}$$

Bezeichnen wir das Bogenelement der Böschungslinie $\mathfrak{P}_0(v)$ mit $ds_0 = \alpha_1$, dasjenige der orthogonalen Trajektorie $\mathfrak{P}_0{}^*(v)$ mit $ds^*{}_0 = \alpha_1{}^*$, so erkennen wir die Gültigkeit der gleichen Beziehung, wie im Euklidischen Raum:

$$ds_0{}^* = ds_0 \sin\vartheta$$

Der Vergleich der Krümmungen $\varkappa_0 = \dfrac{\beta_3}{\alpha_1} = (\tau_0 + 1)\operatorname{tg}\vartheta$ und

$$\varkappa_0{}^* = \frac{\beta_3{}^*}{\alpha_1{}^*} = 2\,\frac{\tau_0 - \cos 2\vartheta}{\sin 2\vartheta}$$

ergibt durch Elimination von τ_0

$$\varkappa_0 = \varkappa_0{}^* \sin^2\vartheta + \sin 2\vartheta$$

Dies entspricht der Beziehung $\varkappa = \varkappa^* \sin^2\vartheta$ des Euklidischen Raumes[7].

Schließlich sehen wir noch, daß die orthogonale Trajektorie die Torsion $\tau_0{}^* = \dfrac{\beta_1{}^*}{\alpha_1{}^*} = -1$ besitzt[8], also eine sogenannte *T-Kurve* des elliptischen Raumes ist[9]. — Die Zylindererzeugende Q_0 deckt sich mit der Binormalen $\{\mathfrak{P}_0{}^*\,\mathfrak{P}_3{}^*\}$ der Kurve $\mathfrak{P}_0{}^*(v)$:

$$q_0 = \mathfrak{P}_3{}^*\,\overline{\mathfrak{P}}_0{}^*, \quad q'_0 = \overline{\mathfrak{P}}_0{}^*\,\mathfrak{P}_3{}^*$$

Jede T-Kurve ist ja orthogonale Trajektorie ihrer zylindrischen Binormalenfläche.

Wir wollen nun durch eine Böschungslinie einen allgemeinen *Clifford*-Zylinder legen, um schließlich auf Grund des liniengeometrischen Übertragungsprinzips dessen Abbildung auf die beiden Richtungskugeln zu verfolgen. — Die Erzeugenden dieser Zylinderfläche seien von gleicher Art parallel, wie die des zugehörigen Böschungszylinders; sie werden jedoch von der Böschungslinie im allgemeinen nicht unter einem konstanten Winkel geschnitten. — Die Böschungslinie selbst erscheint dann als Durchdringungskurve zweier Zylinder dargestellt.

---

[7] Bei Herleitung der Beziehung zwischen $\varkappa_0$ und $\varkappa_0{}^*$ setzen wir naturgemäß $\vartheta \neq \frac{\pi}{2}$ voraus,; sie bleibt jedoch auch für $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ sinnvoll und liefert $\varkappa_0 = \varkappa_0{}^*$.

[8] Für eine Rechts-Böschungslinie erhalten wir $\tau_0{}^* = +1$.

[9] Vgl. *E. Salkowski*, Zur Theorie der Kurven im elliptischen Raum. Jahresber. d. D. Math.-Vereinig., Bd. 21 (1912), S. 27—52.

Soll die Gerade $X = \{\mathfrak{P}_0\, \mathfrak{X}\} = [\mathfrak{x}, \mathfrak{x}']$ einen Links-Zylinder durch unsere Böschungslinie $\mathfrak{P}_0(v)$ beschreiben, so müssen die Koeffizienten c_i, mit denen wir die Größen

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{X} &= c_1 \mathfrak{P}_1 + c_2 \mathfrak{P}_1 + c_3 \mathfrak{P}_3 \\ \mathfrak{x} &= \mathfrak{X}\, \overline{\mathfrak{P}}_0 = c_1 \mathfrak{r}_1 + c_2 \mathfrak{r}_2 + c_3 \mathfrak{r}_3 \\ \mathfrak{x}' &= \overline{\mathfrak{P}}_0\, \mathfrak{X} = c_1 \mathfrak{r}_1' + c_2 \mathfrak{r}_2' + c_3 \mathfrak{r}_3' \end{aligned}\right\}$$

aus den Bestimmungsstücken des begleitenden Polartetraeders unserer Kurve aufbauen, die folgenden Bedingungen erfüllen, die aus $d\,\mathfrak{x} = 0$ unter Berücksichtigung von (5) erfließen.

$$\left.\begin{aligned} dc_1 &= + c_2 \omega_3 \\ dc_2 &= - c_1 \omega_3 + c_3 \omega_1 \\ dc_3 &= - c_2 \omega_1 \end{aligned}\right\}$$

Dieses schiefsymmetrische System von linearen homogenen Differentialgleichungen, für dessen Koeffizienten noch die Bedingung (9) gilt, kann durch die Substitution

$$c = c_3 \cos\vartheta - c_1 \sin\vartheta \tag{14}$$

in das System

$$\left.\begin{aligned} dc_2 &= + \frac{\omega_3}{\sin\vartheta}\, c \\ dc &= - \frac{\omega_3}{\sin\vartheta}\, c_2 \end{aligned}\right\}$$

und in die Differentialgleichung

$$dc_1 \cos\vartheta + dc_3 \sin\vartheta = 0$$

übergeführt werden, deren Integration sofort möglich ist. Wir finden

$$c_2 = k_1 \sin\psi, \quad c = k_1 \cos\psi, \quad \psi = \frac{1}{\sin\vartheta} \int \omega_3, \tag{15}$$

sowie

$$c_1 \cos\vartheta + c_3 \sin\vartheta = k_2 \tag{16}$$

Hiebei müssen wir über die Koeffizienten k_i und eine weitere Integrationskonstante in der Darstellung von ψ noch so verfügen, daß der Normierungsbedingung

$$c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1$$

genügt wird. — Wenn wir daher

$$k_1 = - \sin\alpha, \quad k_2 = \cos\alpha \quad (\alpha = \text{konst.})$$

setzen, so erhalten wir schließlich aus (14), (15) und (16)

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= +\sin\alpha\sin\vartheta\cos\psi + \cos\alpha\cos\vartheta \\ c_2 &= -\sin\alpha\sin\psi \\ c_3 &= -\sin\alpha\cos\vartheta\cos\psi + \cos\alpha\sin\vartheta \end{aligned}\right\} \quad \psi = \frac{1}{\sin\vartheta}\int\omega_3$$

Aus

$$(\mathfrak{Q}_0\,\mathfrak{X}) = (\mathfrak{q}_0\,\mathfrak{x}) = (\mathfrak{q}_0'\,\mathfrak{x}') = \cos\alpha \tag{17}$$

entnehmen wir sofort die geometrische Bedeutung der Integrationskonstanten α: Sie ist gleich dem Neigungswinkel der Zylindererzeugenden X gegen die Erzeugende Q_0 des Böschungszylinders. Durchläuft $\mathfrak{P}_0$ die Böschungslinie, so beschreibt daher die Erzeugende X für fest gewähltes α in Bezug auf das begleitende Polartetraeder einen *Drehkegel* mit der Achse Q_0, der Punkt $\mathfrak{X}$ also in der Ebene $\mathfrak{P}_0 = \{\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3\}$ einen *Kreis* mit dem Radius α und dem Mittelpunkt $\mathfrak{Q}_0$.

Die Polarebene des Punktes $\mathfrak{Q}_0$ schneidet die Kante $G_2^* = \{\mathfrak{P}_3\mathfrak{P}_1\}$ im Punkte

$$\mathfrak{R} = +\mathfrak{P}_1\sin\vartheta - \mathfrak{P}_3\cos\vartheta$$

und den „Radius" $\{\dot{\mathfrak{Q}}_0\,\mathfrak{X}\}$ in einem Punkte $\mathfrak{S} = \lambda\,\mathfrak{Q}_0 + \mu\,\mathfrak{X}$. Die Koeffizienten λ und μ bestimmen sich durch die Forderung $(\mathfrak{S}\,\mathfrak{Q}_0) = 0$ und die Normierungsbedingung $(\mathfrak{S}\,\mathfrak{S}) = 1$. Wir finden

$$\mathfrak{S} = \frac{1}{\sin\alpha}\,\mathfrak{X} - \operatorname{ctg}\alpha\,\mathfrak{Q}_0 = +\mathfrak{P}_1\sin\vartheta\cos\psi - \mathfrak{P}_2\sin\psi - \mathfrak{P}_3\cos\vartheta\cos\psi$$

Für die Strahlen $R = \{\mathfrak{P}_0\,\mathfrak{R}\} = [\mathfrak{r}, \mathfrak{r}']$ und $S = \{\mathfrak{P}_0\,\mathfrak{S}\} = [\mathfrak{s}, \mathfrak{s}']$ ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{r} &= \mathfrak{R}\,\overline{\mathfrak{P}}_0 = +\mathfrak{r}_1\sin\vartheta - \mathfrak{r}_3\cos\vartheta \\ \mathfrak{r}' &= \overline{\mathfrak{P}}_0\,\mathfrak{R} = +\mathfrak{r}_1'\sin\vartheta - \mathfrak{r}_3'\cos\vartheta \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{s} &= \mathfrak{S}\,\overline{\mathfrak{P}}_0 = +\mathfrak{r}_1\sin\vartheta\cos\psi - \mathfrak{r}_2\sin\psi - \mathfrak{r}_3\cos\vartheta\cos\psi \\ \mathfrak{s}' &= \overline{\mathfrak{P}}_0\,\mathfrak{S} = +\mathfrak{r}_1'\sin\vartheta\cos\psi - \mathfrak{r}_2'\sin\psi - \mathfrak{r}_3'\cos\vartheta\cos\psi \end{aligned}\right\}$$

Wegen

$$(\mathfrak{R}\,\mathfrak{S}) = (\mathfrak{r}\,\mathfrak{s}) = (\mathfrak{r}'\,\mathfrak{s}') = \cos\psi \tag{18}$$

kommt also obigem Winkel ψ die Bedeutung eines Schnittwinkels der beiden Strahlenpaare R und S, bzw. G_2^* und $\{\mathfrak{Q}_0\,\mathfrak{X}\} = \{\mathfrak{Q}_0\,\mathfrak{S}\}$ zu. Fassen wir etwa

$$\mathfrak{X}_0 = \mathfrak{P}_1\cos(\vartheta - \alpha) + \mathfrak{P}_3\sin(\vartheta - \alpha)$$

als Ausgangslage des Punktes $\mathfrak{X}$ (zum Winkel $\psi = 0$) auf, so erfolgt in der Ebene $\mathfrak{P}_0$ die Drehung des Punktes $\mathfrak{X}_0$ in die Lage $\mathfrak{X}$ gerade durch den Winkel ψ, wobei $\mathfrak{Q}_0$ als Zentrum fungiert. Hiemit ist auch die geometrische Bedeutung von ψ geklärt.

Nun untersuchen wir noch, wie die sphärischen Bilder der Böschungslinie und der durch sie legbaren Zylinderflächen zusammenhängen! Als sphärisches Bild einer Kurve bezeichnen wir die beiden isometrisch auf einander bezogenen Kurven, die von den Richtungsvektoren der Kurventangente auf den beiden Einheitskugeln (linke und rechte Kugel) beschrieben werden. $\mathfrak{r}_1$ und $\mathfrak{r}_1'$ durchlaufen somit die sphärischen Bilder unserer Böschungslinie $\mathfrak{P}_0(v)$. — Zufolge $\mathfrak{q}_0 =$ konst. und der Darstellung (8) dreht sich die von $\mathfrak{r}_1$ und $\mathfrak{r}_3$ aufgespannte Ebene um $\mathfrak{q}_0$; es durchläuft der Endpunkt von $\mathfrak{r}_1$ daher einen *Kreis* vom Radius $\sin\vartheta$, das linke sphärische Bild der Böschungslinie. $\mathfrak{r}_3$ beschreibt hiebei gleichfalls einen Kreis (vom Radius $\cos\vartheta$) und der Endpunkt von $\mathfrak{r}_2$ wandert auf dem Hauptkreis in der Ebene normal $\mathfrak{q}_0$.

Die sphärischen Bilder einer Regelfläche, im besonderen einer Zylinderfläche werden von den Richtungsvektoren der Erzeugenden beschrieben. — Das linke Bild der Erzeugenden X unseres durch die Böschungslinie gelegten allgemeinen Linkszylinders ist daher der Endpunkt des festen Vektors $\mathfrak{x}$. Wegen (17) ist sein sphärischer Abstand vom Endpunkte des Vektors $\mathfrak{q}_0$ gleich α. Im sphärischen Dreieck, das von den Vektoren $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{q}_0$, $\mathfrak{x}$ auf der linken Kugel gebildet wird, tritt, wie (18) zeigt, bei $\mathfrak{q}_0$ der „Winkel" ψ auf; die „Seiten" sind nach früherem $\mathfrak{r}_1\mathfrak{q}_0 = \vartheta$ und $\mathfrak{x}\mathfrak{q}_0 = \alpha$ (vgl. Abb.). Nach Wahl der Integrationskonstanten ändert sich nur der Winkel ψ mit dem Kurvenparameter v.

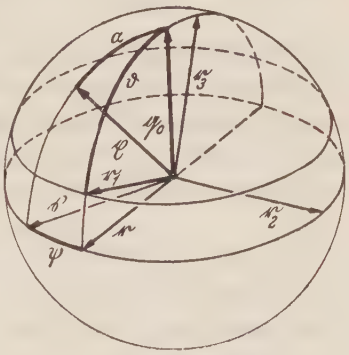

Abb. 1

Die Größen ϑ, α und ψ treten nun auch in gleicher Bedeutung im rechten sphärischen Bild auf, nur daß hiebei im allgemeinen die Vektoren $\mathfrak{q}_0'$ und $\mathfrak{x}'$ nicht mehr fest sind, sondern auf der rechten Kugel Kurven beschreiben, die in einfachem geometrischen Zusammenhang stehen. $\mathfrak{q}_0'$ beschreibt eine *Parallelkurve* zur Kurve $\mathfrak{r}_1'$ im konstanten Abstand $\mathfrak{r}_1'\mathfrak{q}_0' = \vartheta$, denn es ist auf Grund der Ableitungsgleichungen (5) und der Bedingung (9)

$$d\,\mathfrak{q}_0' = \mathfrak{r}_2'\,(\omega_3\cos\vartheta - \omega'_1\sin\vartheta) = 2\,\alpha_1\,\mathfrak{r}_2'\sin\vartheta$$

und somit dieser Vektor parallel zu $d\,\mathfrak{r}_1' = \omega_3\,\mathfrak{r}_2'$.

Für das Bogenelement der Kurve $\mathfrak{r}_1'$ finden wir $ds_1' = \omega_3 = d\psi \sin \vartheta$. Es ist, wie schon früher erwähnt, gleich dem Bogenelement des von $\mathfrak{r}_1$ auf der linken Kugel beschriebenen Kreises. — Lassen wir nun auf der rechten Kugel einen Kreis mit dem sphärischen Radius ϑ (also einen solchen Kreis, wie er im linken Bild von $\mathfrak{r}_1$ beschrieben wird) auf der Kurve $\mathfrak{r}_1'$, dem rechten sphärischen Bild der Böschungslinie, abrollen, so wandert sein Mittelpunkt gerade auf obiger, von $\mathfrak{q}_0'$ durchlaufener Parallelkurve (Bild des Böschungszylinders). Jeder andere bei diesem Rollvorgang mit dem bewegten Kreis starr verbundene Punkt $\mathfrak{x}'$ (Wahl von α und des Ausgangswertes des Wälzwinkels ψ) besitzt eine Bahnkurve, die das rechte Bild eines durch die Böschungslinie gelegten allgemeinen *Clifford*schen Linkszylinders (Erzeugende X) ist.

Dieser anschauliche geometrische Sachverhalt umfaßt für $\alpha = \vartheta = \frac{\pi}{2}$ das Ergebnis von *Salkowski*[9'] über *T-Kurven* als Sonderfall. Er stellt das rechte sphärische Bild einer Links-T-Kurve ($\tau_0 = -1$) als sphärische Evolute des rechten Bildes eines in solcher Weise durch die Kurve gelegten Linkszylinders dar, daß dessen Erzeugende immer in die Schmiegebene der Kurve zu liegen kommt. — Unsere Böschungslinien können somit als *Verallgemeinerung der T-Kurven* angesehen werden — es ist ja jede T-Kurve Böschungslinie zum Winkel $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ auf ihrem Binormalenzylinder.

Schließlich können wir uns noch mit den Erzeugenden Q_0 und X eine beliebige Gerade $Y = [\mathfrak{y}, \mathfrak{y}']$ starr verbunden und beim Durchlaufen der Böschungslinie, bzw. des durch sie gelegten *Clifford*-Zylinders mitgeführt denken. Da die stationären Abstände zweier Geraden des elliptischen Raumes in einfachster Weise mit den Winkeln ihrer Richtungsvektoren zusammenhängen, sind die sphärischen Bilder dieser von Y beschriebenen Regelfläche leicht anzugeben: $\mathfrak{q}_0$, $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ bilden auf der linken Kugel ein festes Dreieck, während das starre Dreieck $\mathfrak{q}_0'$, $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{y}'$ auf der rechten Bildkugel bei obiger Rollung mitgenommen wird. Die Bahnkurve von $\mathfrak{y}$ erscheint somit gleichfalls als eine solche Rollkurve dargestellt. — Die Erzeugende Y selbst beschreibt einen Linkszylinder.

Im Euklidischen Raum sind die Böschungslinien auch durch die einfache Eigenschaft gekennzeichnet, *konstante konische Krümmung* zu

[9'] Vgl. *E. Salkowski*, a. a. O., S. 50/51.

besitzen, wobei wir unter dieser das Verhältnis von Torsion zu Krümmung, also $\frac{\tau}{\varkappa} = \operatorname{ctg} \chi$, im betrachteten Kurvenpunkt verstehen. Die geometrische Bedeutung des Winkels χ ist hiebei, *halber Öffnungswinkel des Krümmungsdrehkegels* zu sein. Im Euklidischen Raum sind also die Böschungslinien als *duale Gegenstücke der windschiefen Kreise* (Kurven konstanter Krümmung) anzusehen, da sich konische und gewöhnliche Krümmung dual entsprechen.

Wir können nun ohne Schwierigkeiten den Begriff des *Krümmungskegels* als duales Gebilde zum Krümmungskreis in die elliptische Geometrie übernehmen und somit als *konische Krümmung* einer Kurve $\mathfrak{P}_0(v)$ den reziproken Wert $\frac{1}{\varkappa_3} = \frac{\tau_0}{\varkappa_0} = \operatorname{tg} \varrho_3$ der Krümmung $\varkappa_3 = \frac{\beta_3}{\beta_1}$ der „Polarkurve" $\mathfrak{P}_3(v)$ erklären. ϱ_3 ist hiebei der „Krümmungsradius" dieser Kurve und kann auch als „Komplement des halben Öffnungswinkels" des Krümmungskegels gedeutet werden[10].

Offensichtlich sind nun unsere Böschungslinien des elliptischen Raumes, die wir auf Grund des Parallelismus von *Clifford* definiert hatten, keine Kurven konstanter konischer Krümmung, da ja zwischen Krümmung und Torsion die Beziehung (10) besteht.

Auch die von *P. Appell*[11] angegebene charakteristische Eigenschaft der Euklidischen Böschungslinien geht im elliptischen Raum verloren. Diese Eigenschaft lautet: Alle Geraden, die mit dem begleitenden Dreikant einer Böschungslinie starr verbunden sind und Torsen beschreiben, bilden im Dreikant einen festen Kegel zweiter Ordnung, dem auch die Kurventangente angehört. — Eine Gerade $T = \{\mathfrak{P}_0\, \mathfrak{T}\}$ des elliptischen Raumes beschreibt nämlich für

$$\mathfrak{T} = t_1 \mathfrak{P}_1 + t_2 \mathfrak{P}_2 + t_3 \mathfrak{P}_3 \quad (t_i = \text{konst.})$$

eine Torse, also die Tangentenfläche einer Raumkurve, wenn

$$(\mathfrak{P}_0, \mathfrak{T}, d\mathfrak{P}_0, d\mathfrak{T}) = 0$$

gilt. Durch Anwendung von (4) erhalten wir aber die Äquivalenz mit

$$t_1 t_3 \beta_3 - (t_2^2 + t_3^2) \beta_1 = 0$$

oder

$$t_1 t_3 \varkappa_0 - (t_2^2 + t_3^2) \tau_0 = 0$$

---

[10] Vgl. *E. Rath*, Die Grundformeln der allgemeinen Kurven- u. Flächentheorie im Nicht-Euklidischen Raum. Diss. Tübingen, 1894, S. 34/35.

[11] Vgl. *P. Appell*, Arch. Math. Phys. (1), Bd. 64, S. 19—23 (1879).

Diese homogene Gleichung zweiten Grades zwischen den Koordinaten t_i in der Ebene $\mathfrak{P}_0 = \{\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3\}$ stellt somit eine Kurve zweiter Ordnung in der Polarebene der Kegelspitze $\mathfrak{P}_0$ dar und ist dann und nur dann von der Lage des betrachteten Kurvenpunktes und Polartetraeders, also vom Parameter v unabhängig, wenn $\frac{\tau_0}{\varkappa_0} = \text{konst.}$, also die Kurve $\mathfrak{P}_0(v)$ von konstanter konischer Krümmung ist. Für unsere Böschungslinien gilt der *Appell*sche Satz somit nicht. Es tritt somit bei der Unterscheidung der Böschungslinien im Sinne unserer Definition und der Kurven konstanter konischer Krümmung[12] eine Aufspaltung eines Euklidischen Begriffes in zwei getrennte Begriffe der elliptischen Geometrie ein, ähnlich wie etwa bei den Torsen und abwickelbaren Flächen oder schon beim Krümmungsmaß einer Fläche und dem als „relative Krümmung" bezeichneten Produkt der beiden Hauptkrümmungen.

Beide Kurvenbegriffe treffen sich jedoch wieder in dem Sonderfall, der Euklidisch einer gewöhnlichen Schraublinie auf einem Kreiszylinder entspricht. — Ist nämlich im besonderen unser Böschungszylinder durch die Kurve $\mathfrak{P}_0(v)$ eine *Clifford*sche Fläche, also eine abwickelbare Minimalfläche (elliptisches Gegenstück zum Euklidischen Kreiszylinder), so ist er, abgesehen von der linksparallelen Geradenschar, die von der Erzeugenden Q_0 beschrieben wird, noch von einer zweiten rechtsparallelen Erzeugendenschar überdeckt, die gegen die erste unter konstantem Winkel geneigt ist. Die Böschungslinie ist daher auch isogonale Trajektorie dieser zweiten Schar der *Clifford*schen Quadrik, also gleichzeitig Links- und Rechtsböschungslinie. Es bestehen somit die Beziehungen (vgl. (10) und Fußnote [4]).

$$\tau_0 + 1 = \varkappa_0 \operatorname{ctg} \vartheta \quad (\vartheta = \text{konst.})$$
$$\tau_0 - 1 = \varkappa_0 \operatorname{ctg} \vartheta^* \quad (\vartheta^* = \text{konst.}),$$

aus denen wir aber sofort folgern, daß die Krümmung $\varkappa_0$ und die Torsion τ_0 konstant sind, unsere Kurve also eine gewöhnliche Schraublinie des elliptischen Raumes ist.

[12] Man könnte diese Kurven konstanter konischer Krümmung zur Unterscheidung von den Böschungslinien etwa kurz als die *allgemeinen Schraublinien* des elliptischen Raumes bezeichnen.

Buchbesprechungen.

Kurze Mathematiker-Biographien. (Beihefte zur Zeitschrift „Elemente der Mathematik": Nr. 2, 3, 4, 5) Basel: E. Birkhäuser. 1947—48. Je Band: sfr 3.50.

Die bekannte Zeitschrift bringt in ihren Beiheften eine Reihe kurzgefaßter Biographien von Schweizer Mathematikern heraus, die trotz des geringen Umfangs von je 24 Seiten ein abgerundetes Bild der wissenschaftlichen Leistungen und die wesentlichen Daten über den Lebenslauf bringen. In der Reihenfolge des Erscheinens aufgezählt, liegen bisher vor: *Jacob Steiner* (von *J. Kollros*, in französischer Sprache), *Leonhard Euler* (von *R. Fueber*), *Ludwig Schläfli* (von *J. J. Burckhardt*) und *Jost Bürgi* (von *E. Voellmy*).

Steiners und Eulers Bedeutung und Schicksale sind ja allgemein bekannt, doch liest man diese gedrängten, doch inhaltsreichen Darstellungen mit großem Genuß. Von Schläfli weiß man im allgemeinen weniger und denkt wohl bei Nennung seines Namens zunächst an seine bekannte „Doppelsechs". Daher ist man überrascht, zu erfahren, wie ausgedehnt der Gesichtskreis und das Arbeitsgebiet dieses stillen Gelehrten waren, der in Geometrie, Algebra, Arithmetik und Analysis wertvolle Leistungen zu verzeichnen hat. Die Bürgi-Biographie bietet einerseits viele interessante Einzelheiten aus der Entdeckungsgeschichte der Logarithmen, anderseits gibt der Bericht über die äußeren Lebensumstände Bürgis, der als Hof- und Kammeruhrmacher am landgräflichen Hof zu Kassel und am Kaiserhof zu Prag tätig war, ein anziehendes Kulturbild aus der Zeit um 1600.

J. Radon, Wien

How to Solve it. Von *G. Polya*. 204 S. Princeton: Princeton University Press. 1945. 16 s. 6. d.

Dieses Buch des bekannten Mathematikers setzt in ausführlicher und meisterhafter Weise die Gedanken auseinander, die der Verfasser gemeinsam mit Prof. *Szegö* in der Einleitung von „Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis" bereits entwickelt hatte. Er wendet sich vor allem an Studenten und Lehrer der Mathematik.

Dieses Buch kann nur sehr empfohlen werden. Es wird gezeigt, wie der Schüler zu selbständiger Arbeit angeleitet werden kann. Aber es wendet sich nicht nur an den Schüler sondern es wendet sich an jeden und zeigt ihm, wie ein Problem anzupacken ist. Eine kurze Inhaltsübersicht möge zeigen, wie dieses Ziel erreicht wird:

Teil I: In der Klasse. II. Wie wird ein Problem gelöst (Dialog zwischen Lehrer und Schüler). Teil III: Kurzes Wörterbuch der heuristischen Überlegungen. Dies ist der wichtigste und umfangsreichste Teil. Ich hebe nur einige Schlagwörter heraus: Analogie, Definition, Bezeichnung des Unbekannten, vollständige Induktion, Symmetrie. An vielen Beispielen werden die entwickelten Methoden erläutert.

Ein Beweis für die Beliebtheit dieses Buches ist die Tatsache, daß es in kurzer Zeit bereits fünf Auflagen erlebt hat.

E. Hlawka, Wien

Elemente der Höheren Mathematik für Studierende der technischen Naturwissenschaften. Von *L. Schrutka.* Siebente Auflage. Mit 143 Textabb., XXX, 635 S. Wien: F. Deuticke. 1948. S. 45.—, geb. S. 60.—.

Unveränderter Abdruck der sechsten Auflage. Ich verweise auf die ausführlichen Besprechungen in den Bänden 27 und 32 (1916, bzw. 1922) unserer Zeitschrift „Monatshefte für Mathematik und Physik".

N. Hofreiter, Wien

Integraltafel. Herausgegeben von *W. Gröbner* und *N. Hofreiter*. I. Teil: Unbestimmte Integrale. VIII, 166 S. Wien und Innsbruck: Springer-Verlag. 1949. S 54.—, sfr. 23.50, $ 5.40.

Hiemit haben die Verfasser ihre erstmals als Notdruck (Braunschweig 1944) erschienene bewährte Integraltafel (von dieser ersten Ausgabe ist kürzlich eine von Ing. Weber gezeichnete französische Übersetzung erschienen, in der die Verfasser des Originalwerkes nicht genannt sind) in erweiterter und in allen Teilen sorgfältig überprüfter Ausführung neu herausgebracht. Die Formeln sind nach Integranden eingeteilt, jenachdem diese rational, algebraisch irrational oder transzendent sind. Die Erweiterungen betreffen hauptsächlich die elliptischen und hyperelliptischen Integrale. Die Anordnung ist sehr übersichtlich, der Stoff erstaunlich vollständig, der Text trotz seiner Knappheit überall leicht verständlich und aufschlußreich. So wird die Tafel nicht nur Mathematikern, Physikern und Ingenieuren viel mühevolles Rechnen ersparen, sondern auch für den, der die nötigen bescheidenen Voraussetzungen mitbringt, ein Mittel zur Weiterbildung und eine genußreiche Lektüre sein. Wer die Tafel aufmerksam durchblättert, stößt immer wieder auf Stellen, wo er gerne Zeile für Zeile liest, den überall eingestreuten Hinweisen auf Zusammenhänge mit anderen Formeln des Buches nachgeht und die in wenigen Worten treffend beschriebenen verschiedenen Möglichkeiten, eine Aufgabe zu lösen, überdenkt. Die Tafel will zwar kein Lehrbuch sein, aber sie ist äußerst lehrreich und ein unerschöpfliches Übungsbuch.

Die Tafel ist nach einer sehr sauberen Handschrift in Faksimile gedruckt, wodurch Druckfehler ausgeschlossen sind. Die Sorgfalt und Sachkenntnis, die aus dem ganzen Werk sprechen, bürgen für weitgehende Fehlerlosigkeit. Der Druck ist klar, das Papier ausgezeichnet und insbesondere den erhöhten Anforderungen an Dauerhaftigkeit, welche bei einer Tafel zu stellen sind, gewachsen.

Es bleibt nur zu wünschen, daß der angekündigte zweite Teil, der den bestimmten Integralen gewidmet ist, bald nachfolgt.

L. Vietoris, Innsbruck

Regular Polytopes. Von *H. S. M. Coxeter.* Mit Textabb. und 8 Tafeln, XX, 321 S. London: Methuen & Co. Ltd. 1948. 50 s. net.

Es bestand schon seit längerer Zeit das Bedürfnis nach einer modernen Darstellung der Polyedertheorie. Diese Lücke wird vom Verfasser, der selbst bedeutende Beiträge zu dieser Theorie geliefert hat, ausgefüllt. Es zeichnet sich dadurch aus, daß alle Hilfsmittel aus Gruppentheorie, Algebra, Geometrie, Kristallographie und Analysis herangezogen werden. Der Verfasser bemüht sich nach Möglichkeit alle benötigten Hilfsmittel zu entwickeln, so daß das Buch von Studenten mittleren Semesters bereits mit Erfolg gelesen werden kann. Manche Teile des Buches verlangen allerdings eine intensive Mitarbeit des

Lesers. Das Buch bringt auch Entwicklungen, die bisher noch nicht veröffentlicht wurden. Dieses Werk ist das Standardwerk der Polyedertheorie. Auch die Geschichte des Gegenstandes wird behandelt. Zahlreiche Zeichnungen und acht Tafeln unterstützen die Entwicklungen des Textes.

Inhaltsübersicht:

1. Polygone und Polyeder: Reguläre Poygone, die fünf platonischen Körper, Euler'sche Formel, Konfiguration. — 2. Reguläre und quasireguläre Körper. — 3. Drehgruppen. — 4. Wabenzellen. — 5. Kaleidoskop (Diskrete Gruppen, die durch Spiegelungen erzeugt werden). — 6. Sternpolyeder. — 7. Polytope im R_n (n $>$ 3). — 8. „Abgestumpfte Polyeder". — 9. Beweis von Poincaré für die Euler'sche Formel im R_n. — 10. Quadratische Formen und Gitter. — 11. Das verallgemeinerte Kaleidoskop. — 12. Die allgemeinen Petriepolygone. — 13. Schnitte und Projektionen. — 14. Sternpolytope im R_n ($n > 3$).

Am Schluß des Werkes werden die Resultate in Tabellen zusammengefaßt. Wegen der Wichtigkeit des Gegenstandes für alle Gebiete der Mathematik ist das Buch für jeden Mathematiker unentbehrlich.

E. Hlawka, Wien

Finite Differences and Difference Equations in the Real Domain. Von *T. Fort.* VIII, 251 S. Oxford: At the Clarendon Press. 1948. 25 s. net.

Der Zusatz „in the real domain" im Titel will besagen, daß der Verfasser keinen Gebrauch von funktionentheoretischen Methoden macht. Wesentlicher ist vielleicht noch, daß die Darstellung fast durchwegs die Variable auf diskrete aequidistante Werte beschränkt; nur im letzten Kapitel, das einen Abriß der Theorie der Γ-Funktion bringt, wird das reelle Zahlkontinuum zugrunde gelegt.

Im Rahmen dieser Einschränkungen wird eine knapp gefaßte, aber eingehende Behandlung des Stoffes geboten. Die ersten sechs Kapitel bringen den üblichen Stoff der älteren Lehrbücher der Differenzenrechnung (Summation, Bernoullische und Euler'sche Polynome und Zahlen, Interpolation, mechanische Quadratur, numerische Differentiation). Mit dem 7. Kapitel setzt dann der wichtigste Teil des Buches ein: die Behandlung der linearen Differenzengleichungen. Sie wird nicht nur in enger Parallele zur Theorie der linearen Differentialgleichungen entwickelt, sondern es wird auch gelegentlich der Grenzübergang von der Differenzengleichung zur Differentialgleichung explizit durchgeführt. Für die Differenzengleichung 2. Ordnung wird die Parallele zur Sturm-Lionoithschen Theorie einschließlich der Entwicklung nach Orthogonalsytemen gegeben, ferner finden Differenzengleichungen 1. und 2. Ordnung mit periodischen Koeffizienten eine originelle Behandlung. Auch die zum einfachsten Variationsproblem analoge Extremumsaufgabe wird, wenn auch recht knapp, besprochen.

Bei dem geringen Umfang des Buches darf es nicht Wunder nehmen, wenn man manches vermißt, das sich in den gegebenen Rahmen ungezwungen hätte einfügen lassen: so namentlich Aussagen über das asymptotische Verhalten der Lösungen im Unendlichen. Auch wäre eine kurze Darstellung der Kettenbruchtheorie im Anschluß an lineare Differenzengleichung 2. Ordnung gewiß reizvoll gewesen. Aber auch der gebotene Stoff bietet des Interessanten und Originellen genug, sodaß man das Werk befriedigt aus der Hand legt.

J. Radon, Wien

Grundzüge der Tensorrechnung in analytischer Darstellung. Von *A. Duschek* und *A. Hochrainer*. In drei Teilen. I. Teil: Tensoralgebra. Zweite Auflage. Mit 26 Textabb., VI, 129 S. Wien: Springer-Verlag. 1948. S 27.—, sfr. 12.—, $ 2.70.

Es ist erfreulich, daß dieses Buch bereits in zweiter Auflage erscheinen mußte. Da die zweite Auflage sich nicht wesentlich von der ersten unterscheidet, so verweise ich auf die im Band 52, Seite 86, der „Monatshefte für Mathematik" erschienene Besprechung.

N. Hofreiter, Wien

Spannung und Spannungstensor. Von *H. Schüepp.* (Beiheft zur Zeitschrift „Elemente der Mathematik": Nr. 1) 24 S. Basel: E. Birkhäuser. 1947. sfr. 3.—.

Die Begriffe Spannung und Spannungstensor werden zunächst anschaulich eingeführt und erst später mit Hilfe der Tensorrechnung definiert. Es wird gezeigt, welche Bedeutung sie in der Festigkeitslehre und in der Hydrostatik besitzen. Die Darstellung ist klar und leicht verständlich.

N. Hofreiter, Wien

Mathematiker-Tagung in Innsbruck 1949.

Die österreichische mathematische Gesellschaft ladet die Mathematiker des In- und Auslandes herzlich ein, an der in Innsbruck stattfindenden Mathematiker-Tagung (28. August bis 2. September 1949) teilzunehmen. Neben zahlreichen wissenschaftlichen Vorträgen werden auch gesellschaftliche Veranstaltungen geboten. Erfreulicherweise haben bereits mehrere Professoren aus Belgien, Deutschland, Frankreich, Italien, Österreich und der Schweiz ihre Teilnahme zugesagt.

Herausgeber, Eigentümer und Verleger: Springer-Verlag, Wien I., Mölkerbastei 5. - Für den Inhalt verantwortlich: Prof. Dr. Johann Radon, Wien XVIII., Herbeckstraße 5. - Druck: Tiroler Graphik, Ges.m.b.H., Innsbruck, Innrain 27—29.

SPRINGER-VERLAG IN WIEN

Soeben erschien:

Moderne Algebraische Geometrie

Die idealtheoretischen Grundlagen

Von

Dr. **Wolfgang Gröbner**

o. Professor der Mathematik an der Universität Innsbruck

XII, 212 Seiten. 1949

S 57.—, sfr. 24.80, $ 5.70

Mit Hilfe moderner idealtheoretischer Methoden entwickelt der Verfasser in klarer und exakter Form die Grundzüge dieser mathematischen Disziplin, die in den letzten Jahrzehnten besonders von italienischen Geometern zu überraschender Höhe gebracht worden ist. Das Buch, das zum Verständnis die Grundbegriffe der Arithmetik, Algebra und analytischen Geometrie voraussetzt, bringt viele neue Forschungsergebnisse von großer Tragweite, die bisher noch in keinem Lehrbuche dargestellt worden sind.

Soeben erschien:

Grundlagen der Höheren Geodäsie

Von

Dr. phil. **Friedrich Hopfner**

Professor der Höheren Geodäsie und Sphärischen Astronomie Wien

Mit 26 Textabbildungen. VIII, 246 Seiten, 1949

S 75.—, sfr. 32.60, $ 7,50, geb. S 81.—, sfr. 35.20, $ 8.10

Hier liegt ein modernes Lehrbuch vor, das dem mathematisch Vorgebildeten einen leichten Zugang zu den Problemen der Geodäsie eröffnet. Der Verfasser, der von dem Standpunkt ausgeht, daß die Geodäsie als angewandte Geometrie zu betrachten sei, beschränkt sich in seiner Darstellung bewußt auf das Wesentliche jedes Problems, indem er die in der Regel bestehenden Zusammenhänge mit gleichartigen Problemen der Geometrie und Potentialtheorie unterstreicht. Die in den Einleitungen zu den beiden Teilen des Buches summarisch zusammengestellten Sätze der Flächentheorie, der Variationsrechnung, der Lehre von den Kugelfunktionen und vom mechanischen Potential bilden den Ausgangspunkt zur Behandlung der Geometrie am Rotationsellipsoid und der mit dem Geoid zusammenhängenden Fragestellungen.

Zu beziehen durch jede Buchhandlung

Printed in Austria